Capitolul 1

Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi rezolvabile prin metode elementare

Definiţia 1.0.1 *O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi este o relaţie de dependenţă funcţională de forma*

$$g(t, x, \dot{x}) = 0 \tag{1.1}$$

între funcţia identică $t \mapsto t$ definită pe intervalul I necunoscut, o funcţie necunoscută x şi derivata ei $\dot{x}$ definite pe acelaşi interval.

În ecuaţia (1.1) funcţia g se consideră cunoscută, iar rezolvarea ecuaţiei înseamnă determinarea funcţiilor necunoscute x care verifică ecuaţia.

Definiţia 1.0.2 *O funcţie reală x de clasă C^1 definită pe un interval deschis $I \subset \mathbb{R}^1$ se numeşte soluţie a ecuaţiei (1.1) dacă pentru orice $t \in I$ tripletul $(t, x(t), \dot{x}(t))$, aparţine domeniului de definiţie al lui g şi*

$$g(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0. \tag{1.2}$$

Graficul unei soluţii: $\Gamma = \{(t, x(t)) | t \in I\}$ se numeşte curbă integrală.

La început vom prezenta câteva cazuri particulare de asemenea ecuaţii, care se rezolvă cu metode elementare şi probleme concrete din diferite domenii care au condus la asemenea ecuaţii.

1.1 Problema primitivei. Ecuaţii diferenţiale de forma $\dot{x} = f(t)$

Problema 1.1.1 O conductă termică are diametrul 10 (cm) şi este izolată cu un strat cilindric de 10 (cm) grosime. Temperatura conductei este $160\,(°C)$, iar temperatura mediului exterior este $30\,(°C)$.

i) Care este legea de variaţie a temperaturii în stratul izolant în cazul staţionar?

ii) Ce cantitate de căldură cedează fiecare metru de conductă în 24 ore?

Se dă coeficientul de conductivitate termică $k = 0,07\,(W/K \cdot m)$.

Rezolvare:

Fie t distanţa unui punct din stratul izolant şi axa conductei termice, $t \in (5, 15) \times 10^{-2} m$ şi $x(t)$ temperatura în acest punct. Temperatura este funcţia necunoscută şi depinde de t, iar funcţia $x = x(t)$ descrie variaţia temperaturiii în stratul izolant.

i) Pentru determinarea funcţiei $x(t)$ folosim legea lui Fourier: cantitatea de căldură Q cedată în unitatea de timp în regim staţionar pe suprafaţa laterală a cilindrului de rază t este proporţională cu produsul dintre aria laterală a cilindrului şi variaţia temperaturii dx:

$$-k \cdot S(t) \cdot \frac{dx}{dt} = Q. \tag{1.3}$$

unde k este conductivitatea termică a materialului izolant.
Aria laterală a cilindrului de rază t şi lungime l, este $S(t) = 2\pi \cdot t \cdot l$. Rezultă:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{Q}{2\pi\, k\, l} \cdot \frac{1}{t}. \tag{1.4}$$

Prin urmare avem de determinat o funcţie $x(t)$ care veifică (1.4).

Din teoria primitivelor rezultă că orice funcţie $x(t)$ care verifică (1.4) este dată de formula

$$x(t) = -\frac{Q}{2\pi\, k\, l} \cdot \ln t + C \tag{1.5}$$

în care $t \in (5, 15)$ şi C este o constantă oarecare. Determinarea legii de variaţie cerute revine la selecţionarea acelei funcţii $x(t)$ din familia (1.5) care

verifică condiţiile: pentru $t_1 = 5$ (cm) avem $x(t_1) = 160\,(°C)$, şi pentru $t_2 = 15$ (cm), $x(t_2) = 30\,(°C)$.

Impunând aceste condiţii, rezultă

$$C = 303 + 130 \cdot \frac{\ln 15 \cdot 10^{-2}}{\ln 3} = 78,51(°K) \quad \text{şi} \quad \frac{Q}{2\pi\, k\, l} = \frac{130}{\ln 3},$$

de unde

$$x(t) = 78,51 - 118,33 \ln t.$$

ii) Folosind valorile numerice rezultă Q iar pentru cantitatea de căldură cedată de fiecare metru liniar (l= 1 m) în 24 ore, $q = \frac{Q}{l} \cdot 24 \cdot 3600(s)$.

Trecem acum la cazul general de rezolvare a unei ecuaţii diferenţiale de forma $\dot{x} = f(t)$ în care f este o funcţie reală continuă definită pe un interval $I \subset I\!R^1$, considerată cunoscută.

Din teoria primitivelor se ştie că, dacă f este o funcţie reală continuă definită pe un interval $I \subset I\!R^1$, atunci există o familie de funcţii reale de clasă C^1 definite pe I a căror derivată este funcţia f. Aceste funcţii diferă între ele printr-o constantă şi se obţin cu formula:

$$x(t) = \int_{t^*}^{t} f(\tau)d\tau + C \tag{1.6}$$

în care C este o constantă reală iar $\displaystyle\int_{t^*}^{t} f(\tau)d\tau$ este o primitivă a funcţiei f. Pentru $t_0 \in I$ şi $x_0 \in I\!R^1$ există o singură soluţie $x = x(t)$ a ecuaţiei (1.6) care verifică condiţia $x(t_0) = x_0$ şi aceasta este dată de formula

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds. \tag{1.7}$$

Problema determinării acelei soluţii a ecuaţiei $\dot{x} = f(t)$ care verifică condiţia $x(t_0) = x_0$ se numeşte problemă cu date iniţiale sau problemă Cauchy. Într-o asemenea problemă t_0 şi x_0 se consideră cunoscute şi se numesc date iniţiale. Problema în sine se notează tradiţional astfel:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t) \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

şi soluţia ei cu $x(t; t_0, x_0)$.

Concluzii

1. Există probleme de fizică care conduc la ecuaţii diferenţiale de forma $\dot{x} = f(t)$ (numită problema primitivei) în care f este o funcţie reală continuă definită pe un interval deschis $(a, b) \subset I\!R^1$.

2. Oricare ar fi soluţia $x = x(t)$ a ecuaţiei diferenţiale $\dot{x} = f(t)$ există o constantă reală C astfel încât

$$x(t) = \int_{t^*}^{t} f(\tau)d\tau + C, \ (\forall)t \in (a, b).$$

3. Oricare ar fi $t_0 \in (a, b)$ şi $x_0 \in I\!R^1$ există o singură funcţie $x = x(t)$ definită pe (a, b) care este soluţia problemei cu date iniţiale

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t) \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

Exerciţii

1. Să se determine soluţiile următoarelor ecuaţii diferenţiale (cu calculatorul):

a) $\dot{x} = 1 + t + t^2; \ t \in I\!R^1$ **R :** $x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + C$

b) $\dot{x} = \frac{1}{t}; \ t > 0$ **R:** $x(t) = \ln t + C$

c) $\dot{x} = 1 + \sin t + \cos 2t; \ t \in I\!R^1$ **R:** $x(t) = t - \cos t + \frac{1}{2} \sin 2t + C$

d) $\dot{x} = \frac{1}{1 + t^2}; \ t \in I\!R^1$ **R:** $x(t) = \arctan t + C$

e) $\dot{x} = \frac{1}{t^2 - 1}; \ t \in (-1, 1)$ **R:** $x(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - t}{1 + t} + C$

f) $\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 4}}; \ t \in I\!R^1 - [-2, 2]$ **R:** $x(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 - 4}) + C$

g) $\dot{x} = e^{2t} + \sin t;\ t \in I\!R^1$ **R:** $x(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \cos t + C$

h) $\dot{x} = e^{t^2};\ t \in I\!R^1$ **R:** se determină numeric o primitivă a lui e^{t^2}, de exemplu $\int_0^t e^{s^2} ds$

2. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy şi să se reprezinte grafic soluţiile (cu calculatorul):

a) $\dot{x} = 1 + t + t^2,\ t \in I\!R^1,$ $x(0) = 1$

R: $x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + 1$

b) $\dot{x} = \frac{1}{t},\ t > 0,$ $x(1) = 0$

R: $x(t) = \ln t$

c) $\dot{x} = 1 + \sin t + \cos 2t,\ t \in I\!R^1,$ $x(-\pi) = 7$

R: $x(t) = -\cos t + \frac{1}{2}\sin 2t + t + 6 + \pi$

d) $\dot{x} = \frac{1}{1+t^2},\ t \in I\!R^1,$ $x(-1) = -2$

R: $x(t) = \arctan t + \frac{1}{4}\pi - 2$

e) $\dot{x} = -\frac{2}{(t^2-1)^2},\ t < 1,$ $x(-2) = 0$

R: $x(t) = \ln\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} + \frac{t}{t^2-1} + \frac{2}{3} - \ln\sqrt{3}$

f) $\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{t^2+t}},\ t > 0,$ $x(1) = 1$

R: $x(t) = \ln\left(\frac{1}{2} + t + \sqrt{t^2+t}\right) + \ln 2 + 1$

1.2 Ecuaţii diferenţiale autonome $\dot{x} = g(x)$

Problema 1.2.1 O rachetă meteorologică este lansată vertical în sus cu viteza iniţială de 100 (m/s). Rezistenţa aerului frânează mişcarea ei şi-i comunică acceleraţia $-k \cdot v^2(t)$, $v(t)$ fiind viteza rachetei la momentul t iar k o constantă pozitivă.

i) Să se afle timpul în care racheta atinge înălţimea maximă.

ii) Să se afle înălţimea maximă la care se ridică racheta.

Rezolvare:

i) Acceleraţia totală a rachetei, în lansarea pe verticală în sus este $a = -(g + k\,v^2)$ unde $g \approx 10$ (m/s^2) este acceleraţia gravitaţională, iar k o constantă pozitivă considerată cunoscută.

Legea de mişcare a rachetei se scrie astfel:

$$\frac{dv}{dt} = -(g + k\,v^2) \tag{1.9}$$

Funcţia v care intervine în (1.9) reprezintă viteza rachetei şi este necunoscută. Ea trebuie găsită pentru ca apoi egalând-o cu zero (aceasta înseamnă că racheta a atins înălţimea maximă) să găsim timpul în care racheta atinge înălţimea maximă.

Din (1.9) şi din inegalitatea $g + k\,v^2 > 0$ rezultă egalitatea

$$-\frac{1}{g + k\,v^2} \cdot \frac{dv}{dt} = 1.$$

Trecând la primitive se obţine egalitatea

$$-\int_{t^*}^{t} \frac{1}{g + k\,v^2(\tau)} \cdot \frac{dv}{d\tau} d\tau = \int_{t^*}^{t} d\tau$$

din care printr-o schimbare de variabilă rezultă

$$\sqrt{\frac{k}{g}} \arctan\left(v(\tau) \cdot \sqrt{\frac{k}{g}}\right)\Bigg|_{t^*}^{t} = -k\tau|_{t^*}^{t}$$

sau

$$v(t) = \sqrt{\frac{k}{g}} \cdot \tan\left[\sqrt{\frac{g}{k}}(-k\,t + C)\right].$$

Constanta C se determină din condiţia iniţială $v(0) = 100$ (m/s) şi se obţine

$$C = \sqrt{\frac{k}{g}} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot 100\right)$$

iar timpul t_1 după care racheta ajunge la înălţimea maximă se determină din condiţia $v(t_1) = 0$ şi se obţine

$$t_1 = \frac{\arctan\left(100\sqrt{\frac{k}{g}}\right)}{\sqrt{g\,k}} \ (s)$$

ii) Pentru a găsi înălţimea maximă la care se ridică racheta se notează cu $x(t)$ înălţimea la care se află racheta la momentul t. Funcţia $x(t)$ este necunoscută şi pentru determinarea ei se ţine seama că viteza $v(t)$ este derivata funcţiei $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \tan\left[\sqrt{\frac{g}{k}}\left(-k\,t + \sqrt{\frac{k}{g}} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot 100\right)\right)\right]$$

şi că $x(0) = 0$ (racheta pleacă de pe sol). Determinarea funcţiei $x(t)$ care verifică aceste condiţii este o problemă Cauchy de forma $\dot{x} = f(t),\ x(t_0) = x_0$ şi rezolvarea ei a fost făcută în §1.1. Se determină soluţia $x(t; 0, x_0)$ a problemei Cauchy şi se calculează apoi $x(t_1; 0, x_0)$. Aceasta este înălţimea maximă la care se ridică racheta meteorologică.

Raţionamentul prezentat la rezolvarea punctului i) al problemei 1.2.1 poate fi generalizat pentru determinarea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale de forma:

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.10}$$

în care g este o funcţie reală continuă definită pe un interval $J \subset I\!R^1$, care nu se anulează $(g(x) \neq 0\ (\forall)x \in J)$ şi este cunoscută.

Într-adevăr, dacă o funcţie reală $x : I \to J$ este o soluţie a ecuaţiei (1.10) atunci pentru orice $t \in I$ avem

$$\frac{dx}{dt} = g(x(t))$$

sau

$$\frac{1}{g(x(t))} \cdot \frac{dx}{dt} = 1.$$

Trecând la primitive rezultă egalitatea

$$\int_{t^*}^{t} \frac{1}{g(x(\tau))} \cdot \frac{dx}{d\tau}\, d\tau = \int_{t^*}^{t} d\tau$$

din care printr-o schimbare de variabilă se obţine

$$\int_{x^*}^{x} \frac{1}{g(u)}\, du = t + C. \tag{1.11}$$

Rezultă în acest fel că o soluţie $x = x(t)$ a ecuaţiei diferenţiale (1.10) este soluţie pentru ecuaţia implicită

$$G(t, x; C) = 0 \tag{1.12}$$

în care

$$G(t, x; C) = t + C - \int_{x^*}^{x} \frac{1}{g(u)}\, du. \tag{1.13}$$

Este uşor de arătat folosind teorema funcţiilor implicite că, dacă $x(t; C)$ este o soluţie a ecuaţiei (1.12), atunci este şi soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1.10).

Observaţia 1.2.1 Dacă funcţia g se anulează în $x^* \in J$, atunci funcţia constantă $x(t) = x^*$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1.10).

Observaţia 1.2.2 Pentru $t_0 \in I\!R^1$ şi $x_0 \in J$, problema determinării acelei soluţii a ecuaţiei (1.10) care verifică condiţia suplimentară $x(t_0) = x_0$ se numeşte problemă Cauchy sau problemă cu date iniţiale:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

iar soluţia acesteia, $x = x(t; t_0, x_0)$, este dată de ecuaţia implicită:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(u)}\, du = t - t_0. \tag{1.15}$$

Într-o problemă Cauchy t_0 şi x_0 sunt considerate cunoscute şi se numesc date iniţiale.

Concluzii

1. Există probleme de fizică care conduc la ecuaţii diferenţiale de forma $\dot{x} = g(x)$ în care g este o funcţie reală continuă definită pe un interval deschis $(c, d) \subset \mathbb{R}^1$ şi nu se anulează.

2. Oricare ar fi soluţia $x(t)$ a ecuaţiei diferenţiale $\dot{x} = g(x)$ şi oricare ar fi $x^* \in (c, d)$ există o constantă scalară C astfel încât $x(t)$ este soluţia ecuaţiei implicite $\int_{x^*}^{x} \frac{1}{g(u)}\, du - t - C = 0$ şi reciproc, o soluţie a acestei ecuaţii implicite este soluţie pentru ecuaţia diferenţială.

3. Oricare ar fi $t_0 \in \mathbb{R}^1$ şi $x_0 \in (c, d)$ există o funcţie unică $x = x(t)$ definită pe un interval deschis I_0 (care conţine pe t_0) şi cu valori în (c, d) care este soluţia problemei cu date iniţiale $\dot{x} = g(x),\ x(t_0) = x_0$.

4. Dacă funcţia g se anulează într-un punct $x^* \in (c, d)$ atunci funcţia constantă $x(t) \equiv x^*$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale.

Exerciţii

1. Să se determine soluţiile următoarelor ecuaţii diferenţiale (cu calculatorul):

a) $\dot{x} = 1 + x^2,\ x \in \mathbb{R}^1$ **R:** $x(t) = \tan(t + C),\ t + C \neq (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$

b) $\dot{x} = e^{-x},\ x \in \mathbb{R}^1$ **R:** $x(t) = \ln(t + C),\ t + C > 0$

c) $\dot{x} = k \cdot x,\ x > 0$ **R:** $x(t) = C \cdot e^{k\,t},\ C > 0,\ t \in \mathbb{R}^1$

d) $\dot{x} = k \cdot x,\ x < 0$ **R:** $x(t) = C \cdot e^{k\,t},\ C < 0,\ t \in \mathbb{R}^1$

e) $\dot{x} = x^2,\ x > 0$ **R:** $x(t) = -\frac{1}{t + C},\ t + C < 1$

2. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy şi să se reprezinte grafic soluţiile cu calculatorul:

a) $\dot{x} = k\,x, \quad x(0) = x_0$ **R:** $x(t) = x_0\, e^{kt}$

b) $\dot{x} = -x + x^2, \quad x(0) = x_0$ **R:** $x(t) = \dfrac{x_0}{x_0 - e^t(x_0 - 1)}$

c) $\dot{x} = 1 + x^2, \quad x(0) = x_0$ **R:** $x(t) = \tan(t + \arctan x_0)$

d) $\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0$ **R:** $x(t) = -\dfrac{x_0}{t\,x_0 - 1}$

1.3 Ecuaţii diferenţiale cu variabile separate

O ecuaţie diferenţială cu variabile separate are forma

$$\dot{x} = f(t) \cdot g(x), \tag{1.16}$$

unde f şi g sunt funcţii reale continue, $f : (a,b) \to I\!R^1$, $g : (c,d) \to I\!R^1$ şi se consideră cunoscute. Dacă funcţia g nu se anulează pe intervalul (c,d) $(g(x) \neq 0,\ (\forall)x \in (c,d))$ atunci soluţiile ecuaţiei (1.16) se determină făcându-se un raţionament asemănător cu cel din paragraful precedent.

Dacă $x : I \subset (a,b) \to (c,d)$ este o soluţie a ecuaţiei (1.16) atunci pentru orice $t \in I$ are loc

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x(t))$$

sau

$$\frac{1}{g(x(t))} \cdot \frac{dx}{dt} = f(t)$$

Trecând la primitive rezultă

$$\int_{t^*}^{t} \frac{1}{g(x(\tau))} \cdot \frac{dx}{d\tau}\, d\tau = \int_{t^*}^{t} f(\tau)$$

care printr-o schimbare de variabilă conduce la egalitatea

$$\int_{x^*}^{x} \frac{1}{g(u)}\, du = \int_{t^*}^{t} f(\tau) + C. \tag{1.17}$$

Am obţinut în acest fel că o soluţie a ecuaţiei (1.16) este soluţie pentru ecuaţia implicită

$$G(x,t;C) = 0 \tag{1.18}$$

în care funcţia $G(x,t;C)$ este dată de egalitatea:

$$G(x,t;C) = \int_{t^*}^{t} f(\tau) + C - \int_{x^*}^{x} \frac{1}{g(u)}\, du. \tag{1.19}$$

Folosind teorema funcţiilor implicite se arată uşor că dacă $x(t,C)$ este o soluţie a ecuaţiei (1.18) atunci este soluţie şi a ecuaţiei diferenţiale (1.16).

Exemplul 1.3.1 Să se determine soluţiile ecuaţiei diferenţiale:

$$\dot{x} = \frac{1}{1+t^2}(1+x^2), \qquad t \in I\!R^1,\ x \in I\!R^1$$

În acest caz $f : I\!R^1 \to I\!R^1$, $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ şi $g : I\!R^1 \to I\!R^1$, $g(x) = 1 + x^2$, iar

$$G(t, x; C) = \arctan t + C - \arctan x$$

Ecuaţia implicită este:

$$\arctan t + C - \arctan x = 0$$

de unde

$$x(t) = \tan(\arctan t + C)$$

Observaţia 1.3.1 Dacă funcţia g din ecuaţia (1.16) se anulează într-un punct $x^* \in (c, d)$ atunci funcţia constantă $x(t) = x^*$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale (1.16).

Observaţia 1.3.2 Pentru $t_0 \in (a, b)$ şi $x_0 \in (c, d)$ problema determinării acelei soluţii a ecuaţiei (1.16) care verifică condiţia suplimentară $x(t_0) = x_0$ se numeşte problemă Cauchy sau problemă cu date iniţiale şi se notează cu

$$\dot{x} = f(t) \cdot g(x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.20}$$

Soluţia acestei probleme se notează de obicei cu $x = x(t; t_0, x_0)$ şi este dată de ecuaţia implicită

$$\int_{x_0}^{x} \frac{du}{g(u)} - \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau = 0. \tag{1.21}$$

Într-o problemă Cauchy, t_0 si x_0 sunt considerate cunoscute şi se numesc condiţii iniţiale.

Observaţia 1.3.3 O clasă particulară importantă de ecuaţii diferenţiale cu variabile separate sunt ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi liniare şi omogene. Aceste ecuaţii sunt de forma

$$\dot{x} = A(t) \cdot x, \qquad t \in (a, b),\ x \in I\!R^1 \tag{1.22}$$

în care $A(t)$ este o funcţie reală continuă pe (a, b). Conform celor arătate, soluţiile ecuaţiei (1.22) sunt date de formula

$$x(t) = C \cdot e^{\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau} \tag{1.23}$$

în care C este o constantă reală oarecare.
Soluţia problemei Cauchy

$$\dot{x} = A(t) \cdot x, \quad x(t_0) = x_0 \qquad t_0 \in (a, b),\ x_0 \in I\!R^1 \tag{1.24}$$

este dată de formula:

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}. \tag{1.25}$$

Problema 1.3.1 O pâine scoasă din cuptor are temperatura $100°C$ şi capătă temperatura de $60°C$ în decurs de 20 minute. Temperatura aerului fiind de $20°C$, peste cât timp, începând din momentul răcirii, pâinea va căpăta temperatura de $25°C$?

Rezolvare:

Notăm cu $x(t)$ temperatura pâinii la momentul t şi folosim legea lui Newton după care, viteza de răcire a unui corp cu temperatura $x(t)$, situat într-un mediu cu temperatura x_0, este proporţională cu diferenţa $x(t) - x_0$:

$$\dot{x}(t) = k\,[x(t) - x_0].$$

Funcţia $y(t) = x(t) - x_0$ verifică ecuaţia

$$\dot{y}(t) = k \cdot y(t)$$

care este o ecuaţie liniară şi omogenă. Rezultă

$$y(t) = C\,e^{k\,t}$$

şi astfel

$$x(t) = x_0 + C\,e^{k\,t}.$$

În această egalitate $x_0 = 20°C$. Pentru determinarea constantelor C şi k ţinem seama de condiţiile $x(0) = 100°C$ şi $x(20) = 60°C$. Rezultă $x(t) = 20°C + 80°C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. Dacă t^* este timpul după care temperatura devine $25°C$ rezultă $25°C = 20°C + 80°C \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t^*}{20}}$, de unde $t^* = 80$ minute.

Concluzii

1. Există probleme de fizică care conduc la ecuaţii diferenţiale de forma $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$, numite ecuaţii cu variabile separate, în care f şi g sunt funcţii reale continue, funcţia f este definită pe un interval $(a, b) \subset I\!R^1$, iar funcţia g este definită pe un interval $(c, d) \subset I\!R^1$ şi nu se anulează în nici un punct $(g(x) \neq 0,\ (\forall)x \in (c, d))$.

2. Oricare ar fi soluţia $x(t)$ a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separate şi oricare ar fi $t^* \in (a, b)$ şi $x^* \in (c, d)$, există o constantă C astfel încât $x(t)$ este soluţia ecuaţiei implicite
$$\int_{x^*}^{x} \frac{du}{g(u)} - \int_{t^*}^{t} f(\tau) d\tau - C = 0$$
şi reciproc, oricare ar fi $t^* \in (a, b)$, $x^* \in (c, d)$ şi $C \in I\!R^1$, o soluţie $x = x(t)$ a ecuaţiei implicite este soluţie pentru ecuaţia diferenţială.

3. Oricare ar fi $t_0 \in (a, b)$ şi $x_0 \in (c, d)$ există o funcţie unică $x = x(t)$ definită pe un interval deschis I_0 (care conţine punctul t_0) şi cu valori în intervalul (c, d), $x : I_0 \subset (a, b) \to (c, d)$ care este soluţia problemei cu date iniţiale $\dot{x} = f(t) \cdot g(x),\ x(t_0) = x_0$.

4. Dacă funcţia g se anulează într-un punct $x^* \in (c, d)$ atunci funcţia constantă $x(t) = x^*$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale.

Exerciţii

1. Să se determine soluţiile următoarelor ecuaţii diferenţiale (cu calculatorul):

a) $\dot{x} = -\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x},\ x < 0,\ t \in I\!R^1$ **R:** $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{t^2+1} = C$

b) $\dot{x} = \dfrac{t}{1+t}(1-x),\ t > -1,\ x > 1$ **R:** $\dfrac{1+t}{1-x} = C \cdot e^t$

c) $\dot{x} = \left(1 + \dfrac{1}{t}\right) \cdot \dfrac{x^2+1}{x^2+2},\ t > 0,\ x \in I\!R^1$ **R:** $x + \arctan x = \ln t + t + C$

2. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy şi să se reprezinte soluţiile (cu calculatorul):

a) $\dot{x} = \sqrt{t\,x},\ t > 0,\ x > 0,\qquad t_0=1,\ \ x_0=0$

R: $x(t) = 0$

b) $\dot{x}=-2t\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x},\ t\in I\!R^1,\ x\in(0,2),\quad t_0=0,\ \ x_0=1$

R: $\sqrt{4-x^2}-t^2-\sqrt{3}=0$

c) $\dot{x}=\dfrac{1}{1-t}\cdot\dfrac{1-x^2}{x},\ t < 1,\ x\in(0,1),\quad t_0=0\ \ x_0=\dfrac{1}{2}$

R: $x(t)=\sqrt{-\dfrac{3}{4}t^2+\dfrac{3}{2}t+\dfrac{1}{4}}$

1.4 Ecuaţii omogene în sens Euler

Ecuaţiile omogene în sens Euler sunt ecuaţii de forma

$$\dot{x} = \frac{P(t,x)}{Q(t,x)} \tag{1.26}$$

în care funcţiile $P(t,x)$ şi $Q(t,x)$ sunt funcţii omogene în sens Euler de acelaşi grad, considerate cunoscute:

$$P(\lambda t, \lambda x) = \lambda^k \cdot P(t,x) \ \text{ şi } \ Q(\lambda t, \lambda x) = \lambda^k \cdot Q(t,x). \tag{1.27}$$

Din (1.27) rezultă egalitatea:

$$\frac{P(t,x)}{Q(t,x)} = \frac{P\left(1, \frac{x}{t}\right)}{Q\left(1, \frac{x}{t}\right)}, \ (\forall) t \neq 0 \tag{1.28}$$

şi prin urmare ecuaţia omogenă (1.26) are forma canonică

$$\dot{x} = g\left(\frac{x}{t}\right), \ (\forall) t \neq 0 \tag{1.29}$$

în care

$$g\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{P\left(1, \frac{x}{t}\right)}{Q\left(1, \frac{x}{t}\right)}.$$

Funcţia reală g este considerată continuă şi cunoscută.

Pentru determinarea soluţiilor ecuaţiei (1.29) se introduc noile funcţii necunoscute $y = \dfrac{x}{t}$ care verifică ecuaţia:

$$\dot{y} = \frac{1}{t}[g(y) - y]. \tag{1.30}$$

Ecuaţiile diferenţiale (1.26) şi (1.30) sunt echivalente în sensul următor: dacă o funcţie $x(t)$ este soluţie pentru ecuaţia (1.26) atunci funcţia $y(t) = \dfrac{x(t)}{t}$ este soluţie pentru ecuaţia (1.30) şi reciproc.

În acest fel, rezolvarea ecuaţiei omogene în sens Euler se reduce la rezolvarea ecuaţiei cu variabile separate (1.30).

Problema 1.4.1 Ce suprafaţă de rotaţie trebuie să reprezinte oglinda unui proiector, pentru ca toate razele de lumină ce pleacă de la o sursă punctiformă să fie reflectate paralel cu o direcţie dată?

Rezolvare:

Considerăm un plan meridian pe care îl luăm ca fiind planul (tOx). Axa Ot o alegem paralelă cu direcţia după care lumina trebuie reflectată, iar originea axelor în sursa de lumină.

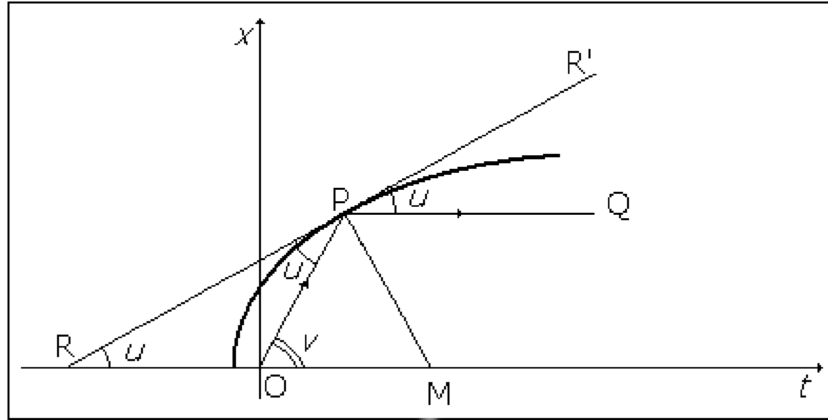


Figura 2 - Reflexia razelor de lumină pe o oglindă parabolică

După legile reflexiei $\sphericalangle OPM = \sphericalangle MPQ$ şi $\sphericalangle RPO = \sphericalangle R'PQ$ şi deci $v = 2u$. Cum $\tan v = \dfrac{x}{t}$ şi $\tan u = \dot{x}$ iar $\tan 2u = \dfrac{2\tan u}{1-\tan^2 u}$ rezultă

$$\frac{x}{t} = \frac{2\dot{x}}{1-\dot{x}^2} \quad \text{sau} \quad \dot{x} = \frac{-t \pm \sqrt{t^2+x^2}}{x}.$$

Ecuaţia diferenţială este omogenă în sens Euler (este de forma (1.29)) şi se rezolvă după modul prezentat obţinându-se $x^2 = 2C\left(t+\dfrac{C}{2}\right)$. Deci curba meridiană este o parabolă cu vârful pe Ot iar oglinda un paraboloid de rotaţie.

Concluzii

1. Există probleme de fizică care conduc la ecuaţii diferenţiale de forma $\dot{x} = g\left(\dfrac{x}{t}\right)$ (numite ecuaţii omogene în sens Euler) în care g este o funcţie reală continuă definită pe un interval $I \subset \mathbb{R}^1$.

2. O funcţie $x = x(t)$ este soluţie a ecuaţiei $\dot{x} = g\left(\frac{x}{t}\right)$ dacă şi numai dacă funcţia $y = \frac{x}{t}$ este soluţie a ecuaţiei cu variabile separate $\dot{y} = \frac{1}{t}[g(y) - y]$.

3. Rezolvarea problemei Cauchy $\dot{x} = g\left(\frac{x}{t}\right)$, $x(t_0) = x_0$ se reduce la rezolvarea problemei Cauchy $\dot{y} = \frac{1}{t}[g(y) - y]$, $y(t_0) = y_0 = \frac{x_0}{t_0}$.

Exerciţii

1. Să se determine soluţiile următoarelor ecuaţii diferenţiale:

a) $\dot{x} = \frac{x}{t} + e^{\frac{x}{t}}$ **R:** $\ln(t) = e^{-\frac{x}{t}} + C$

b) $\dot{x} = \frac{x^2 + t^2}{t \cdot x}$ **R:** $x^2 = 2t^2 \ln(t) + C \cdot t^2$

c) $\dot{x} = \frac{t + x}{t - x}$ **R:** $\arctan\frac{x}{2} - \ln\sqrt{\frac{x^2}{t^2} + 1} = \ln t + C$

d) $\dot{x} = \frac{x}{t - 2\sqrt{tx}}$ **R:** $\sqrt{\frac{t}{x}} - \ln\frac{x}{t} = \ln t + C$

2. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy şi să se reprezinte grafic soluţiile (cu calculator):

a) $\dot{x} = \frac{4tx - x^2}{2t^2}$, $t_0 = 1$, $x_0 = 1$ **R:** $x(t) = \frac{2t^2}{t + 1}$

b) $\dot{x} = \frac{2tx}{3t^2 - x^2}$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ **R:** $x(t) = 0$

c) $\dot{x} = \frac{2t + x}{4t - x}$, $t_0 = 1$, $x_0 = 1$ **R:** $x(t) = t$

d) $\dot{x} = -\frac{x + t}{5x + t}$, $t_0 = 1$, $x_0 = 0$ **R:** $x(t) = -\frac{1}{5}t + \frac{1}{5}\sqrt{-4t^2 + 5}$

1.5 Ecuaţii omogene generalizate

Ecuaţiile omogene generalizate sunt ecuaţii diferenţiale de forma:

$$\dot{x} = f\left(\frac{at + bx + c}{a_1 t + b_1 x + c_1}\right) \tag{1.31}$$

în care funcţia reală f este considerată continuă şi cunoscută, şi unde $c_1^2 + c^2 \neq 0$ (dacă $c_1 = c = 0$, ecuaţia este omogenă în sens Euler). Pentru determinarea soluţiilor acestei ecuaţii ţinem seama de următoarele rezultate:

Propoziţia 1.5.1 *Dacă* $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ *atunci în urma schimbării de variabilă independentă* t *şi de funcţie necunoscută* x *definite de formulele:*

$$\tau = t - t_0 \text{ şi } y = x - x_0 \tag{1.32}$$

ecuaţia diferenţială (1.31) se transformă în ecuaţia diferenţială omogenă în sens Euler:

$$\frac{dy}{d\tau} = f\left(\frac{a\tau + by}{a_1\tau + b_1 y}\right) \tag{1.33}$$

unde (t_0, x_0) *este soluţia sistemului de ecuaţii algebrice*

$$\begin{cases} at + bx + c = 0 \\ a_1 t + b_1 x + c_1 = 0. \end{cases} \tag{1.34}$$

Demonstraţie: Prin calcul.

În urma schimbării de funcţie necunoscută definită prin

$$z = \frac{y}{\tau} \tag{1.35}$$

ecuaţia (1.33) se transformă în ecuaţia diferenţială cu variabile separate

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{\tau}\left[f\left(\frac{a + bz}{a_1 + b_1 z}\right) - z\right]. \tag{1.36}$$

Propoziţia 1.5.2 *Dacă* $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = m$, *atunci în urma schimbării de funcţie necunoscută* x *definită de*

$$y(t) = a_1 t + b_1 x(t) \tag{1.37}$$

ecauţia diferenţială (1.31) se transformă în ecuaţia diferenţială autonomă

$$\dot{y} = a_1 + b_1 \cdot f\left(\frac{my + c}{y + c_1}\right). \tag{1.38}$$

Exerciţii

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale:

a) $\dot{x} = \dfrac{3t-4x+7}{4t-5x+11}$ **R:** $x(t) = -5 - \dfrac{1}{C}\left[-\dfrac{4}{5}(t+1) + \dfrac{1}{5}\sqrt{(t+9)^2\, C^2 + 5}\right]$

b) $\dot{x} = -\dfrac{3t+3x-1}{t+x+1}$ **R:** $-\dfrac{1}{2}(x+t) - \ln(x+t-1) = t + C$

c) $\dot{x} = \dfrac{2(x+2)^2}{(t+x+2)^2}$ **R:** $2\arctan\dfrac{-x-2}{t} - \ln\dfrac{-x-2}{t} - \ln t - C = 0$

1.6 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

O ecuaţie diferenţială de forma

$$\dot{x} = A(t)x + B(t) \tag{1.39}$$

se numeşte ecuaţie diferenţială liniară de ordinul întâi. În ecuaţia (1.39) A şi B sunt funcţii reale continue $A, B : (a, b) \to I\!R^1$ şi se consideră cunoscute.

Dacă funcţia B este identic nulă, atunci ecuaţia (1.39) se numeşte ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară omogenă şi soluţiile ei sunt date de formula:

$$\tilde{x}(t) = C \cdot e^{\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau} \tag{1.40}$$

în care C este o constantă reală oarecare (a se vedea §1.3).

Pentru a determina soluţiile ecuaţiei (1.39) remarcăm faptul că diferenţa a două soluţii ale acestei ecuaţii este o soluţie a ecuaţiei liniare şi omogene. Acest fapt se verifică uşor prin calcul. Rezultă de aici că dacă x este o soluţie oarecare a ecuaţiei (1.39) şi $\bar{x}$ este o soluţie fixată a ecuaţiei (1.39), atunci diferenţa $x - \bar{x}$ este soluţie pentru ecuaţia liniară şi omogenă, şi prin urmare

$$x(t) - \bar{x}(t) = C \cdot e^{\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau}$$

sau

$$x(t) = C \cdot e^{\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau} + \bar{x}(t). \tag{1.41}$$

Egalitatea (1.41) arată că o soluţie oarecare $x(t)$ a ecuaţiei (1.39) se obţine adăugând la o soluţie particulară $\bar{x}(t)$ a acestei ecuaţii, o soluţie oarecare a ecuaţiei liniare şi omogene $\tilde{x}(t) = C \cdot e^{\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau}$. În acest mod determinarea tuturor soluţiilor ecuaţiei (1.39) se reduce la determinarea unei soluţii particulare a acestei ecuaţii.

Determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei (1.39) se face cu "metoda variaţiei constantei a lui Lagrange".Aceasta înseamnă că pentru ecuaţia (1.39) se caută o soluţie particulară $\bar{x}(t)$ care are forma funcţiei dată de (1.40), deosebirea fiind că C nu mai este o constantă reală ci este o funcţie de t $(C = C(t))$:

$$\bar{x}(t) = C(t) \cdot e^{\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau}. \tag{1.42}$$

Pentru a impune funcţiei $\bar{x}(t)$ să verifice ecuaţia (1.39) se admite că funcţia $C(t)$ este derivabilă şi din faptul că $\bar{x}(t)$ verifică (1.39) se obţine:

$$\dot{C}(t)\, e^{\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau} + A(t)\, C(t)\, e^{\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau} = A(t)\, C(t)\, e^{\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau} + B(t)$$

sau

$$\dot{C}(t) = B(t)\, e^{-\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau}. \tag{1.43}$$

În §1.1 am văzut că toate funcţiile care verifică (1.43) sunt date de

$$C(t) = \int_{t^*}^{t} B(u)\, e^{-\int_{t^*}^{u} A(\tau)d\tau} du + C' \tag{1.44}$$

Întrucât avem nevoie de o singură soluţie, considerăm $C' = 0$ şi înlocuind în (1.42) avem:

$$\bar{x}(t) = \left(\int_{t^*}^{t} B(u)\, e^{-\int_{t^*}^{u} A(\tau)d\tau} du\right) e^{\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau} \tag{1.45}$$

Rezultă în acest mod că toate soluţiile ecuaţiei (1.39) sunt date de:

$$x(t) = C\, e^{\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau} + \left(\int_{t^*}^{t} B(u)\, e^{-\int_{t^*}^{u} A(\tau)d\tau} du\right) e^{\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau}. \tag{1.46}$$

Pentru $t_0 \in (a, b)$ şi $x_0 \in I\!R^1$ ecuaţia (1.39) are o singură soluţie x care verifică $x(t_0) = x_0$ şi este dată de formula:

$$x(t; t_0, x_0) = x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} B(u)\, e^{\int_{u}^{t} A(\tau)d\tau} du. \tag{1.47}$$

Problema 1.6.1 Unei bobine cu inductanţa $L = 1$ (H) şi rezistenţa $R = 2$ (Ω) i se aplică tensiunea electromotoare $u = \sin 3t$ (V). Care este intensitatea curentului prin bobină?

Rezolvare:

Legea lui Kirchoff aplicată circuitului format din bobină şi sursa de tensiune ne dă

$$L \cdot \dot{x} + R \cdot x = \sin 3t,$$

$x(t)$ fiind intensitatea curentului. Ţinând seama de datele numerice rezultă ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi

$$\dot{x} + 2x = \sin 3t.$$

Conform celor arătate obţinem că intensitatea curentului este:

$$x(t) = \frac{3}{13}e^{-2t} + \frac{2}{13}\sin 3t - \frac{3}{13}\cos 3t.$$

(S-a considerat că la momentul iniţial intensitatea curentului în circuit este zero).

Concluzii

1. Există probleme de fizică care conduc la ecuaţii diferenţiale de forma $\dot{x} = A(t)x + B(t)$ (numite ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi) în care A, B sunt funcţii reale continue definite pe un interval real $I \subset I\!R^1$.

2. Oricare ar fi soluţia $x = x(t)$ a ecuaţiei şi oricare ar fi $t^* \in I$ există o constantă reală C astfel încât să avem

$$x(t) = C\, e^{\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau} + \int_{t^*}^{t} e^{\int_{\tau}^{t} A(s)ds} B(\tau)d\tau,\ (\forall)t \in I.$$

3. Oricare ar fi $t_0 \in (a, b)$ şi $x_0 \in I\!R^1$ există o singură funcţie $x = x(t)$ definită pe I care este soluţia problemei cu date iniţiale $\dot{x} = A(t)x + B(t),\ x(t_0) = x_0$ şi această funcţie este dată de formula:

$$x(t) = x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{\tau}^{t} A(s)ds} B(\tau)d\tau.$$

Exerciţii

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii diferenţiale (cu calculatorul):

a) $\dot{x} = \frac{1}{t}x - 1$ **R:** $x(t) = t\,(-\ln t + C)$

b) $\dot{x} = -\frac{2}{t^2-1}x + 2t + 2$ **R:** $x(t) = \frac{(-t^2 + 2t + C)\,(t+1)^2}{1 - t^2}$

c) $\dot{x} = -\frac{2}{t^2-1}x + \frac{4t}{1-t^2}$ **R:** $x(t) = \left(4\ln(t+1) + \frac{4}{t+1} + C\right) \cdot \frac{(t+1)^2}{1-t^2}$

d) $\dot{x} = x - t^2$ **R:** $x(t) = t^2 + 2t + 2e^t\, C$

2. Să se rezolve următoarele probleme cu date iniţiale şi să se reprezinte grafic soluţiile lor (cu calculatorul):

a) $\dot{x} = -2tx + t^3, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = \frac{e-1}{2}$ **R:** $x(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t^2+1}$

b) $\dot{x} = \frac{1}{t}x - \ln t, \quad t_0 = 1, \quad x_0 = 1$ **R:** $x(t) = \left(-\frac{1}{2}\ln^2 t + 1\right) t$

c) $\dot{x} = -x + 2e^t, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 2$ **R:** $x(t) = e^t + e^{-t}$

d) $\dot{x} = -ax + be^{pt}, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 1$ **R:** $x(t) = \left(be^{(p+a)t} - b + p + a\right) \cdot \frac{e^{-at}}{a+p}$

1.7 Ecuaţia diferenţială a lui Bernoulli

Ecuaţia diferenţială a lui Bernoulli are forma

$$\dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,x^{\alpha} \tag{1.48}$$

în care funcţiile A şi B sunt funcţii reale continue $A, B : (a,b) \to I\!R^1$ şi se consideră cunoscute, α este un număr real diferit de 0 şi 1 cunoscut, iar funcţia necunoscută $x(t)$ este pozitivă.

Pentru a determina soluţiile x (pozitive) ale ecuaţiei (1.48) se introduce o nouă funcţie necunoscută $y = x^{1-\alpha}$. Aceasta verifică ecuaţia:

$$\frac{dy}{dt} = (1-\alpha)\,A(t)\,y + (1-\alpha)\,B(t). \tag{1.49}$$

Ecuaţia (1.49) este o ecuaţie liniară de ordinul întâi şi soluţiile ei sunt date de formula:

$$\begin{aligned} y(t) &= C\,e^{(1-\alpha)\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau} + \\ &+ \left((1-\alpha)\int_{t^*}^{t} B(u)\,e^{-(1-\alpha)\int_{t^*}^{u} A(\tau)d\tau} du\right) e^{(1-\alpha)\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau}. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Soluţiile pozitive $x(t)$ ale ecuaţiei (1.48) se determină din $y(t)$ cu formula $x(t) = y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ şi în general sunt definite pe (a,b).

Pentru $t_0 \in (a,b)$ şi $x_0 > 0$ ecuaţia (1.48) are o soluţie care verifică $x(t_0) = x_0$ şi este dată de formula

$$x(t;t_0,x_0) = y^{\frac{1}{1-\alpha}}(t;t_0,x_0) \tag{1.51}$$

unde:

$$y(t;t_0,y_0) = y_0\,e^{(1-\alpha)\int_{t^*}^{t} A(\tau)d\tau} + (1-\alpha)\int_{t_0}^{t} B(u)\,e^{-(1-\alpha)\int_{u}^{t} A(\tau)d\tau} du \tag{1.52}$$

şi $y_0 = x_0^{1-\alpha}$.

Observaţia 1.7.1 Ecuaţia Bernoulli apare în studiul mişcării corpurilor în medii care opun o rezistenţă la mişcare de forma $R = k_1 v + k_2 v^{\alpha}$, v fiind viteza corpului.

Problema 1.7.1 Să se determine curba $r = r(u)$ ştiind că aria sectoarelor limitate de curbă, raza vectoare a punctului $P_0(r_0, u_0)$ şi raza vectoare a punctului $P(r, u)$ este proporţională cu produsul ru, coeficientul de proporţionalitate fiind a.

Rezolvare:

Conform enunţului avem:

$$\frac{1}{2}\int_{u_0}^{u} r^2 du = a\, r\, u$$

din care prin derivare obţinem:

$$r^2 = 2a\,(\dot{r}\,u + r)$$

care este o ecuaţie Bernoulli.

Concluzii

1. Există probleme de fizică care conduc la ecuaţii diferenţiale de forma $\dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,x^{\alpha},\ (\alpha \in I\!R^1,\ \alpha \neq 0, 1)$ (numită ecuaţia diferenţială a lui Bernoulli) în care A, B sunt funcţii reale continue definite pe un interval $I \subset I\!R^1$.

2. O funcţie pozitivă $x = x(t)$ este soluţie a ecuaţiei Bernoulli dacă şi numai dacă funcţia $y(t) = [x(t)]^{1-\alpha}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul întâi $\dot{y} = (1-\alpha)\,A(t)\,y + (1-\alpha)\,B(t)$.

3. Determinarea soluţiilor pozitive ale ecuaţiei Bernoulli se reduce la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi.

Exerciţii

1. Să se determine soluţiile pozitive ale ecuaţiilor:

a) $\dot{x} = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t^2}x^2$ **R:** $x(t) = \frac{2t}{1 + 2t^2\, C}$

b) $\dot{x} = \frac{4}{t}x + tx^{1/2}$ **R:** $\sqrt{x(t)} = -\left(-\frac{1}{2}\ln t + C\right) \cdot t^2 = 0$

c) $\dot{x} = -\frac{1}{t}x + tx^2$ **R:** $x(t) = -\frac{1}{(t - C)\, t}$

d) $\dot{x} = \frac{1}{t}x - 2tx^2$ **R:** $x(t) = \frac{3t}{2t^3 + 3C}$

2. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $\dot{x} = -\frac{1}{t}x + tx^2, \quad t_0 = 1, \quad x_0 = 1$ **R:** $x(t) = -\frac{1}{t(t-2)}$

b) $\dot{x} = \frac{1}{t}x - 2tx^2, \quad t_0 = 1, \quad x_0 = 1$ **R:** $x(t) = \frac{3t}{2t^3 + 1}$

c) $\dot{x} = \frac{2}{t}x + \frac{1}{2t^2}x^2, \quad t_0 = 1, \quad x_0 = 1$ **R:** $x(t) = \frac{2t^2}{3 - t}$

1.8 Ecuaţia diferenţială a lui Riccati

Ecuaţia diferenţială a lui Riccati are forma

$$\dot{x} = A(t)\,x^2 + B(t)\,x + C(t) \tag{1.53}$$

în care A, B, C sunt funcţii reale $A, B, C : (a, b) \to I\!R^1$ continue ($A(t) \not\equiv 0$, $C(t) \not\equiv 0$) considerate cunoscute.

Propoziţia 1.8.1 *Dacă $x_1(t)$ este o soluţie fixată a ecuaţiei (1.53) şi $x(t)$ este o soluţie oarecare a aceleiaşi ecuaţii, atunci funcţia $y(t) = x(t) - x_1(t)$ este o soluţie a ecuaţiei Bernoulli*

$$\dot{y} = A(t)\,y^2 + (2A(t)\,x_1 + B(t))\,y. \tag{1.54}$$

Demonstraţie: Se verifică prin calcul.

Propoziţia precedentă reduce determinarea soluţiilor ecuaţiei Riccati la determinarea soluţiilor unei ecuaţii Bernoulli. Trebuie subliniat că această reducere se face în ipoteza că se cunoaşte o soluţie $x_1(t)$ a ecuaţiei Riccati. În general dacă nu se cunoaşte o soluţie pentru ecuaţia lui Riccati, determinarea soluţiilor acestei ecuaţii nu se poate face cu metode elementare.

Observaţia 1.8.1 Prin schimbarea de funcţie $y(t) = x(t) - x_1(t)$ rezolvarea ecuaţiei lui Riccati (1.53) se reduce la rezolvarea unei ecuaţii de tip Bernoulli care, conform cu §1.7 se reduce la o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară.

Observaţia 1.8.2 Rezolvarea ecuaţiei lui Riccati se poate reduce direct la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniară cu necunoscuta $z(t)$ dacă se face schimbarea de funcţie

$$x(t) = \frac{1}{z(t)} + x_1(t).$$

Exerciţii

1. Să se determine soluţiile următoarelor ecuaţii diferenţiale Riccati:

a) $\dot{x} = -\sin t \cdot x^2 + 2\frac{\sin t}{\cos^2 t}$, $\quad x_1(t) = \frac{1}{\cos t}$

R: $x(t) = \frac{1}{\cos t} + \frac{6\cos 2t + 6}{-\cos 3t - 3\cos t + 12\,C}$

c) $\dot{x} = x^2 - \frac{a}{t}x - \frac{a}{t^2}$, $\quad x_1(t) = \frac{a}{t}$

R: $x(t) = \frac{a}{t} + \frac{a+1}{-t + t^{-a}(a+1)\,C}$

2. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $\dot{x} = -\frac{1}{t(2t-1)}\,x^2 + \frac{4t+1}{t(2t-1)}\,x - \frac{4t}{t(2t-1)}$, $\quad x_1(t) = 1,\ t_0 = 2,\ x_0 = 1$

R: $x(t) = \frac{t(2t-1)}{5-t} + 1$

b) $\dot{x} = -x^2 + \frac{4}{t}x - \frac{4}{t^2}$, $\quad x_1(t) = \frac{1}{t}, t_0 = 1,\ x_0 = 0$

R: $x(t) = \frac{3}{t(t+2)} + \frac{1}{t}$

1.9 Ecuaţii cu diferenţială totală exactă. Factor integrant

O ecuaţie diferenţială de forma:

$$\dot{x} = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)} \tag{1.55}$$

este cu diferenţială totală exactă dacă există o funcţie U de clasă C^1 cu proprietatea:

$$dU = P\,dt + Q\,dx. \tag{1.56}$$

Acesta înseamnă că există o funcţie U de clasă C^1 a cărei diferenţială este egală cu $P\,dt + Q\,dx$. Altfel spus, $P = \dfrac{\partial U}{\partial t}$ şi $Q = \dfrac{\partial U}{\partial x}$.

Propoziţia 1.9.1 *Dacă ecuaţia diferenţială (1.55) este cu diferenţială totală exactă şi o funcţie reală $U = U(t,x)$ de clasă C^1 are proprietatea (1.56), atunci pentru orice soluţie $x=x(t)$ a ecuaţiei (1.55)*

$$U(t,x(t)) = const.$$

Demonstraţie: Pentru a demonstra că funcţia $U(t,x(t))$ nu depinde de t, se derivează în raport cu t şi se obţine:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U(t,x(t)) &= \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} = P(t,x(t)) + Q(t,x(t))\cdot\left(-\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}\right) = \\ &= P(t,x(t)) - P(t,x(t)) = 0\end{aligned}$$

Această propoziţie arată că o soluţie $x(t)$ a ecuaţiei cu diferenţială totală exactă este o soluţie a ecuaţiei implicite:

$$U(t,x) = C \tag{1.57}$$

în care C este o constantă reală.

Este uşor de verificat că şi afirmaţia reciprocă este adevărată: o soluţie $x = x(t)$ a ecuaţiei implicite (1.57) este o soluţie a ecuaţiei cu diferenţială totală (1.55).

Astfel, determinarea soluţiilor ecuaţiei cu diferenţială totală (1.55) se reduce la determinarea soluţiilor ecuaţiei implicite (1.57). Acest rezultat conduce în mod natural la următoarele două probleme:

1. Cum ne dăm seama că ecuaţia (1.55) este cu diferenţială totală?

2. Cum se determină o funcţie $U = U(t,x)$ a cărei diferenţială este egală cu $P\,dt + Q\,dx$?

Un răspuns la aceste întrebări este dat de următoarea propoziţie.

Propoziţia 1.9.2 *Dacă funcţiile P şi Q sunt de clasă C^1 pe un domeniu Ω şi $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial t}$, atunci pentru orice $(t_0, x_0) \in \Omega$ există un $r > 0$ şi o funcţie reală $U = U(t,x)$ definită pe discul centrat în (t_0, x_0) şi de rază r astfel încât să aibe loc relaţia (1.56).*

Demonstraţie: Pentru un punct $(t_0, x_0) \in \Omega$ se consideră $r > 0$ astfel ca discul centrat în (t_0, x_0) şi de rază $r > 0$ să fie inclus în Ω. Pornind de la faptul că pe disc trebuie să avem $\dfrac{\partial U}{\partial t} = P$ deducem că $U(t,x) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} P(\tau, x)d\tau + \Psi(x)$ unde Ψ este o funcţie de clasă C^1 necunoscută. Impunând condiţia $\dfrac{\partial U}{\partial x} = Q$ obţinem egalitatea:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial P}{\partial x}(\tau, x)\, d\tau + \Psi'(x) = Q(t,x).$$

Ţinând seamă acum de egalitatea $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial t}$ deducem că:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial Q}{\partial t}(\tau, x)\, d\tau + \Psi'(x) = Q(t,x).$$

Efectuând integrarea se obţine egalitatea:

$$Q(t,x) - Q(t_0, x) + \Psi'(x) = Q(t,x)$$

din care rezultă:

$$\Psi'(x) = Q(t_0, x).$$

Prin urmare funcţia $\Psi(x)$ este dată de formula:

$$\Psi(x) = \int_{x_0}^{x} Q(t_0, y)\, dy + C \tag{1.58}$$

în care C este o constantă reală. Revenind la funcţia $U(t,x)$ obţinem că aceasta este dată de formula:

$$U(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau, x)\, d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0, y)\, dy + C. \tag{1.59}$$

Formula aceasta defineşte o mulţime de funcţii $U(t,x)$ care au proprietatea exprimată prin relaţia (1.56).

Comentariu: Propoziţia arată că egalitatea $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial t}$ este o condiţie suficientă pentru ca să existe în vecinătatea oricărui punct $(t_0, x_0) \in \Omega$ o funcţie $U(t,x)$ de clasă C^2 astfel ca $dU = P\,dt + Q\,dx$.

Menţionăm că şi reciproca acestei afirmaţii este adevărată. Mai precis este adevărată următoarea afirmaţie: dacă există $r > 0$ şi o funcţie $U(t,x)$ de clasă C^2 pe discul centrat în (t_0, x_0) şi rază r astfel ca $dU = P\,dt + Q\,dx$ pentru orice (t,x) din acest disc, atunci funcţiile P şi Q sunt de clasă C^1 şi $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial t}$ pentru orice (t,x) din disc. Acest rezultat se obţine folosind posibilitatea inversării ordinii de derivare, stabilit de Schwartz.

Observaţia 1.9.1 Dacă funcţiile P şi Q sunt de clasă C^1 pe $\Omega \subset I\!R^2$ dar $\dfrac{\partial P}{\partial x} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial t}$ atunci ecuaţia (1.55) nu este o ecuaţie cu diferenţială totală exactă şi metoda prezentată nu poate fi utilizată pentru determinarea soluţiilor ecuaţiei. În acest caz este util să observăm că ecuaţia (1.55) are aceleaşi soluţii ca şi ecuaţia

$$\dot{x} = -\frac{P(t,x) \cdot \mu(t,x)}{Q(t,x) \cdot \mu(t,x)} \tag{1.60}$$

în care $\mu(t,x)$ este o funcţie de clasă C^1 care nu se anulează.

Datorită acestui fapt apare natural să încercăm să determinăm funcţia $\mu(t,x)$ astfel ca ecuaţia (1.60) să fie cu diferenţială totală. Impunând această condiţie rezultă că funcţia $\mu(t,x)$ trebuie să verifice relaţia:

$$\frac{\partial P}{\partial x}\,\mu + P\,\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}\,\mu + Q\,\frac{\partial \mu}{\partial t}. \tag{1.61}$$

O funcţie care verifică (1.61) se numeşte factor integrant, iar relaţia de dependenţă funcţională (1.61) se numeşte ecuaţia factorului integrant.

Exerciţii

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii cu diferenţiale totale:

a) $\dot{x} = \dfrac{4tx - xe^{tx}}{te^{tx} - 2t^2}$ **R:** $2t^2\, x(t) + e^{t\,x(t)} = C$

b) $\dot{x} = \dfrac{t^m + 2tx^2 + \frac{1}{t}}{x^n + 2t^2x + \frac{1}{x}}$ **R:** $\dfrac{t^{m+1}}{m+1} + \dfrac{x(t)^{n+1}}{n+1} + t^2\, x(t)^2 + \ln(t\, x(t)) = C$

c) $\dot{x} = -\dfrac{2tx - 2x^3}{t^2 - 6tx^2}$ **R:** $t^2\, x(t) - 4t\, x(t)^3 = C$

2. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

a) $\dot{x} = -\dfrac{t + x}{t - x},\ \ t_0 = 0,\ x_0 = 1$ **R:** $x(t) = t + \sqrt{2t^2 + 1}$

b) $\dot{x} = -\dfrac{t^2}{x^2},\ \ t_0 = 1,\ x_0 = 1$ **R:** $x(t) = \sqrt[3]{-t^3 + 2}$

3. Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale ştiind că ele admit factor integrant $\mu = \mu(t)$:

a) $\dot{x} = -\dfrac{t\, \sin x + x\, \cos x}{t\, \cos x - x\, \sin x}$ **R:** $\mu(t) = e^t$

$$e^t\,[(t-1)\sin x(t) + x(t)\cos x(t)] = C$$

b) $\dot{x} = -\dfrac{1 - t^2\, x}{t^2(x - t)}$ **R:** $\mu(t) = \dfrac{1}{t^2}$

$$\frac{x(t)^2}{2} - t\, x(t) - \frac{1}{t} = C$$

4. Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale ştiind că ele admit factor integrant $\mu = \mu(x)$:

a) $\dot{x} = -\dfrac{x(1 - t\,x)}{-t}$ **R:** $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$$\frac{t}{x(t)} - \frac{t^2}{2} = C$$

b) $\dot{x} = -\dfrac{2t\,x}{3x^2 - t^2 + 3}$ **R:** $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$$\frac{t^2}{x(t)} + 3x(t) = C$$

1.10 Calculul simbolic al soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi

Foarte multe dintre modelele matematice ale unor fenomene din realitate conţin cel puţin o ecuaţie diferenţială. Toate softurile comerciale de matematică (Maple, Mathematica, Mathcad) oferă posibiltatea să rezolvăm numeric aceste probleme.

Exemplele de rezolvare numerică care sunt în acest curs vor fi prezentate în programul *Maple 9*, versiune care acoperă toate celelate versiuni de *Maple* în momentul de faţă.

Pentru rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale cu programul *Maple* se foloseşte funcţia *dsolve* (solve ordinary differential equations - ODEs) cu una din următoarele sintaxe :

dsolve(ODE);

dsolve(ODE, x(t), extra.args);

dsolve({ODE, ICs}, x(t), extra.args);

în care:

ODE	- ecuaţia diferenţială ordinară pe care dorim să o rezolvăm
$x(t)$	- funcţia necunoscută pe care dorim să o determinăm
ICs	- condiţiile iniţiale
$extra.args$	- argumente opţionale care se folosesc pentru schimbarea formei de afişare a soluţiei (explicită, implicită, parametrică), a metodei de rezolvare a ecuaţiei (separarea variabilelor, Bernoulli, Riccati, etc.).

Pentru exemplificare, considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul întâi:

$$\dot{x} = \frac{t}{1+t} \cdot (1-x); \quad t \in \mathbb{R} - \{-1\}, \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}. \tag{1.62}$$

Această ecuaţie este cu variabile separate (caz particular de ecuaţie liniară). Prin utilizarea sintaxei $dsolve(ODE)$ se obţine mulţimea soluţiilor ecuaţiei date (ecuaţia familiei de curbe integrale scrisă sub formă explicită):

```
> dsolve(diff(x(t),t)=(t/(1+t))*(1-x(t)));
```

$$x(t) = \left(\frac{e^t}{1+t} + _C1\right)(e^{-t} + e^{-t}t).$$

Dacă dorim ca soluţiile să fie afişate sub formă parametrică, atunci se foloseşte argumentul opţional '*parametric*' şi obţinem:

```
> dsolve(diff(x(t),t)=(t/(1+t))*(1-x(t)),x(t),'parametric');
```

$$x(t) = 1 - \frac{e^{-t}}{_C1} - \frac{e^{-t}t}{_C1}.$$

Se mai poate utiliza ca argument opţional "metoda de rezolvare a ecuaţiei". Dacă dorim să se rezolve ecuaţia diferenţială ca o ecuaţie liniară, atunci se foloseşte argumentul opţional [*linear*] şi obţinem:

```
> dsolve(diff(x(t),t)=(t/(1+t))*(1-x(t)),x(t),[linear]);
```

$$x(t) = \left(\frac{e^t}{1+t} + _C1\right)(e^{-t} + e^{-t}t),$$

iar dacă dorim să se rezolve ecuaţia diferenţială ca fiind o ecuaţie cu variabile separate, atunci folosim argumentul opţional [*separable*] şi obţinem:

```
> dsolve(diff(x(t),t)=(t/(1+t))*(1-x(t)),x(t),[separable]);
```

$$x(t) = \frac{\left(_C1\, e^t - 1 - t\right)e^{-t}}{_C1}.$$

Nespecificând metoda de rezolvare *Maple* va alege una dintre ele.

Deoarece în secvenţele de mai sus nu s-a dat nici o condiţie iniţială, *Maple* a afişat răspunsul cu ajutorul unei constante necunoscute. Dacă specificăm şi condiţia iniţială atunci calculatorul va rezolva o problemă cu condiţii iniţiale (Problemă Cauchy) şi va afişa soluţia acesteia.

Pentru ecuaţia diferenţială (1.62) vom considera două Probleme Cauchy deoarece domeniul de definiţie al membrului drept este reuniunea $(-\infty, -1) \times I\!R^1 \cup (-1, +\infty) \times I\!R^1$.

Dacă considerăm $t > -1$ şi condiţia iniţială $x(2) = 4$, atunci se obţine soluţia:

```
> dsolve({diff(x(t),t)=(t/(1+t))*(1-x(t)),x(2)=4},x(t));
```

$$x(t) = \left(\frac{e^t}{1+t} - 1/3\,\frac{e^{-2}e^2 - 4}{e^{-2}}\right)(e^{-t} + e^{-t}t),$$

iar dacă considerăm $t < -1$ şi condiţia iniţială $x(-2) = 0$, atunci se obţine soluţia:

```
> dsolve({diff(x(t),t)=(t/(1+t))*(1-x(t)),x(-2)=0},x(t));
```

$$x\,(t) = \left(\frac{e^t}{1+t} + e^{-2}\right)(e^{-t} + e^{-t}t).$$

Pentru reprezentarea grafică a soluţiei unei probleme cu date iniţiale, programul *Maple* foloseşte funcţia *plot* (create a two-dimensional plot of functions).
Utilizarea acesteia implică următoarea sintaxă:

plot(f,h,v);

în care:

f - funcţia care trebuie reprezentată grafic;
h - domeniul de definiţie al funcţiei pe axa orizontală;
v - (opţional) domeniul de variaţie al funcţiei pe axa verticală.

Soluţia Problemei Cauchy a ecuaţiei (1.62) corespunzătoare condiţiei iniţiale $x(2) = 4$ este reprezentată pe Figura 2.

```
> f1:=(exp(t)/(1+t)-1/3*(exp(-2)*exp(2)-4)/exp(-2))*
      (exp(-t)+exp(-t)*t):
> plot(f1,t=-1..infinity);
```



Figura 2

iar soluţia Problemei Cauchy corespunzătoare condiţiei iniţiale $x(-2) = 0$ este reprezentată pe Figura 3.

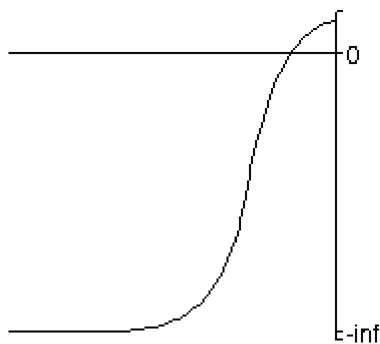


Figura 3

După cum se poate observa din instrucţiunile de mai sus s-a atribuit variabilei $f1$ funcţia soluţie a Problemei Cauchy şi apoi am folosit în instrucţiunea *plot*. În general, este recomandabil să se atribuie unor expresii matematice variabile, deoarece aceasta simplifică scrierea.

În cele ce urmează, continuăm exemplificarea rezolvând trei probleme cu date iniţiale şi, în fiecare caz, vom reprezenta grafic soluţia:

1. Ecuaţia liniară
$$\dot{x} = -x + 2e^t \tag{1.63}$$

```
> dsolve(diff(x(t),t)=-x(t)+2*exp(t),x(t),[linear]);
```

$$x(t) = e^t + e^{-t}_C1$$

```
> dsolve({diff(x(t),t)=-x(t)+2*exp(t),x(0)=2},x(t),
[linear]);
```

$$x(t) = e^t + e^{-t}$$

```
> plot(exp(t)+exp(-t),t=-2..2);
```

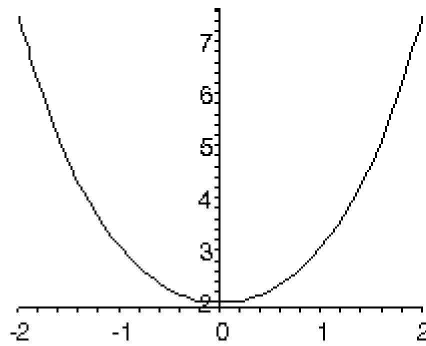


Figura 4

sau

```
> plot(exp(t)+exp(-t),t=-2..2,color=black,style=point,
  axes=boxed);
```

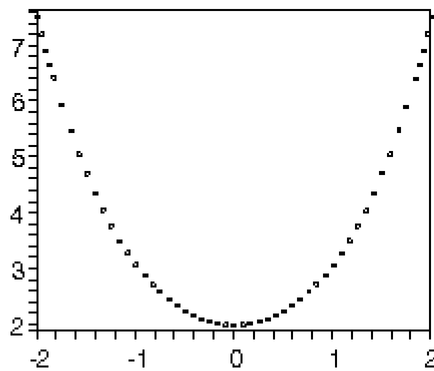


Figura 5

în care am folosit diferite comenzi opţionale referitoare la modalitatea de afişare a graficului.

2. Ecuaţia de tip Riccati

$$\dot{x} = -x^2 + \frac{4}{t} \cdot x - \frac{4}{t^2}, \quad t > 0 \tag{1.64}$$

```
> eq:=diff(x(t),t)=-x(t)^2+(4/t)*x(t)-4/t^2;
```

$$eq := \frac{d}{dt}x(t) = -(x(t))^2 + 4\,\frac{x(t)}{t} - 4\,t^{-2}$$

```
> dsolve(eq,`explicit`,[Riccati]);
```

$$x(t) = (_C1 - 1/3\,t^{-3})^{-1}\,t^{-4} + 4\,t^{-1}$$

```
> dsolve(eq,[Riccati]);
```

$$x(t) = (_C1 - 1/3\,t^{-3})^{-1}\,t^{-4} + 4\,t^{-1}$$

```
> dsolve({eq,x(1)=2},x(t));
```

$$x(t) = \frac{4\,t^3+2}{(2+t^3)\,t}$$

```
> dsolve({eq,x(1)=2},x(t),[Riccati]);
```

$$x(t) = (-1/6 - 1/3\,t^{-3})^{-1}\,t^{-4} + 4\,t^{-1}$$

```
> sol1:=(4*t^3+2)/((2+t^3)*t):
> sol2:=1/((-1/6-1/3/t^3)*t^4)+4/t:
> plot([sol1,sol2],t=0..90,x=0..3,color=[red,blue],
  style=[point,line]);
```

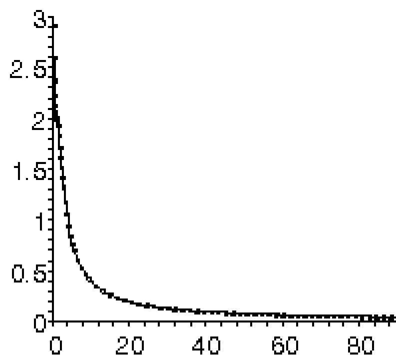


Figura 6

În secvenţele de mai sus observăm că, argumentul opţional în care cerem să se afişeze soluţia sub formă explicită este inutil, deoarece acest lucru este făcut automat de *dsolve*. Deasemenea, dacă folosim argumentul opţional *[Riccati]* soluţia ecuaţiei diferă doar aparent (cele două soluţii afişate coincid după cum se poate observa din Figura 6 unde am reprezentat simultan "ambele" forme ale soluţiei în acelaşi sistem de coordonate).

3. Ecuaţia cu factor integrant

$$\dot{x} = -\frac{2 \cdot t \cdot x}{3x^2 - t^2 + 3}, \qquad 3x^2 - t^2 + 3 \neq 0 \tag{1.65}$$

```
> dsolve(diff(x(t),t)=-2*t*x(t)/(3*x(t)^2-t^2+3),‘explicit‘);
```

$$x(t) = -1/6\,_C1 \pm 1/6\sqrt{_C1^2 - 12\,t^2 + 36}$$

```
> dsolve(diff(x(t),t)=-2*t*x(t)/(3*x(t)^2-t^2+3),‘implicit‘);
```

$$\frac{t^2}{x(t)} + 3\,x(t) - 3\,(x(t))^{-1} + _C1 = 0$$

```
> dsolve({diff(x(t),t)=-2*t*x(t)/(3*x(t)^2-t^2+3),x(0)=1});
```

$$x(t) = 1/6\sqrt{36 - 12\,t^2}$$

```
> plot(1/6*(36-12*t^2)^(1/2), t=-1..1);
```

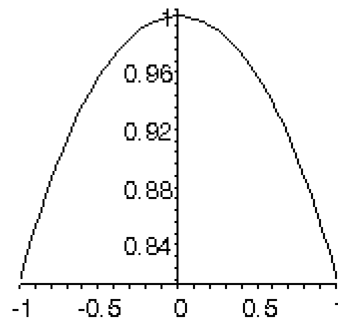


Figura 7

Ecuaţia cu factor integrant a fost rezolvată de *Maple* fără specificarea factorului integrant $\mu = \mu(t, x)$ iar soluţia a fost afişată sub formă explicită în primul caz, respectiv sub formă implicită în al doilea caz. În Figura 7 este reprezentată soluţia Problemei Cauchy corespunzătoare.

Capitolul 2

Ecuaţii diferenţiale de ordin superior rezolvabile prin metode elementare

Definiţia 2.0.1 *O ecuaţie diferenţială de ordinul* $n \geq 2$ *este o relaţie de dependenţă funcţională de forma*

$$g(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

între funcţia identică $t \mapsto t$ *definită pe un interval* $I \subset \mathbb{R}^1$ *necunoscut, o funcţie necunoscută* $x(t)$ *şi derivatele ei* $\dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n)}$ *până la ordinul* n *definite pe acelaşi interval.*

În ecuaţia (2.1) funcţia g se consideră cunoscută şi rezolvarea ecuaţiei înseamnă determinarea funcţiilor necunoscute x care verifică ecuaţia.

Definiţia 2.0.2 *O funcţie reală* x *de clasă* $\mathcal{C}^n$ *definită pe un interval deschis* $I \subset \mathbb{R}^1$ *se numeşte soluţie a ecuaţiei (2.1) dacă pentru orice* $t \in I$*, sistemul ordonat* $(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^{(n)}(t))$ *aparţine domeniului de definiţie a lui* g *şi*

$$g(t, x(t), \dot{x}(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0 \tag{2.2}$$

Vom prezenta câteva cazuri de asemenea ecuaţii care se rezolvă cu metode elementare şi probleme concrete din diferite domenii care au condus la asemenea ecuaţii.

2.1 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi

Problema 2.1.1 Să se determine variaţia curentului într-un circuit format dintr-o rezintenţă R, o bobină cu inductanţă L şi un condensator de capacitate C legaţi în serie şi conectaţi la o sursă de curent alternativ de tensiune electromotoare $E = E_0 \cdot cos \;\; \omega t$

Rezolvare: Fie $i(t)$ intensitatea curentului din circuit la momentul t. Căderile de tensiune pe elementele circuitului sunt:

$$u_R = R \cdot i;$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt};$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i(t)dt;$$

conform celei de-a doua legi a lui Kirchhoff, suma căderilor de tensiune pe bobină, rezistenţă şi condensator este egală în orice moment cu tensiunea electromotoare a generatorului. Prin urmare avem:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i(t)dt = E_0 \cdot \cos \omega t,$$

iar prin derivare se obţine că intensitatea a curentului verifică egalitatea:

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = -E_0 \cdot \omega \cdot \sin \omega t. \qquad (*)$$

Prin urmare avem de determinat o funcţie $i(t)$ care împreună cu derivatele ei de ordinul întâi şi doi verifică relaţia de dependenţă funcţională $(*)$. În $(*)$ cu excepţia funcţiei i totul este cunoscut.

Pentru a determina funcţia necunoscută $i(t)$ vom arăta în continuare cum se rezolvă o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi.

O ecuaţie diferenţială liniară de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi este o ecuaţie diferenţială de forma:

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = f(t) \qquad (2.3)$$

în care a_0, a_1, a_2 sunt constante reale cunoscute, $a_2 \neq 0$, $f(t)$ funcţie continuă cunoscută şi x este o funcţie reală de clasă $\mathcal{C}^2$ necunoscută.

Observaţia 2.1.1 Dacă $f = 0$ atunci ecuaţia (2.3) se numeşte ecuaţie diferenţială liniară de ordinul doi cu coeficienţi constanţi omogenă, iar dacă $f \neq 0$ ecuaţia (2.3) se numeşte ecuaţie diferenţială liniară de ordinul doi cu coeficienţi constanţi neomogenă.

Vom determina mai întâi soluţiile ecuaţiei omogene urmând apoi să determinăm şi soluţiile ecuaţiei neomogene.

Fie ecuaţia omogenă ataşată ecuaţiei (2.3):

$$a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0 \tag{2.4}$$

Dacă $a_2 = 0$ atunci ecuaţia (2.4) este o ecuaţie liniară de ordinul întâi:

$$a_1\dot{x} + a_0x = 0$$

şi soluţiile ei sunt date de formula

$$x(t) = Ce^{-\frac{a_0}{a_1}t}$$

în care C este o constantă reală oarecare. Observăm că raportul $-\dfrac{a_0}{a_1}$ din exponent, este soluţia ecuaţiei algebrice $a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$, iar la formula soluţiei $x(t) = Ce^{-\frac{a_0}{a_1}t}$ se poate ajunge nu numai pe calea descrisă în Capitolul 1 § 6 ci şi căutând soluţii de forma $x(t) = Ce^{\lambda t}$. Aceasta este ideea pe care o vom folosi pentru a determina soluţiile ecuaţiei (2.4).

Impunând unei funcţii de forma $x(t) = Ce^{\lambda t}$ să verifice ecuaţia (2.4) rezultă că λ trebuie să verifice ecuaţia de gradul al doilea:

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0x = 0. \tag{2.5}$$

Dacă rădăcinile λ_1 şi λ_2 ale ecuaţiei (2.5) sunt reale şi distincte, atunci funcţiile

$$x_1(t) = C_1e^{\lambda_1 t} \quad \text{şi} \quad x_2(t) = C_2e^{\lambda_2 t}$$

sunt soluţii ale ecuaţiei (2.4) şi funcţia

$$x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$$

este de asemenea soluţie a ecuaţiei (2.4). Mai mult, pentru orice t_0, x_0^0, $x_0^1 \in I\!R^1$ putem determina în mod unic constantele C_1 şi C_2 astfel încât să aibă loc

$$x(t_0) = x_0^0 \quad \text{şi} \quad \dot{x}(t_0) = x_0^1. \tag{2.6}$$

În adevăr, impunând condiţiile (2.6) funcţiei $x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$, obţinem următorul sistem de ecuaţii algebrice:

$$\begin{array}{rcl} x_0^0 & = & C_1e^{\lambda_1 t_0} + C_2e^{\lambda_2 t_0} \\ x_0^1 & = & C_1e^{\lambda_1 t_0} + C_2e^{\lambda_2 t_0} \end{array}$$

în care necunoscutele sunt C_1 şi C_2.

Determinantul acestui sistem este $e^{(\lambda_1+\lambda_2)t_0} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)$ şi este nenul $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, fapt pentru care sistemul are o soluţie unică.

În particular rezultă de aici că formula:

$$x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} \tag{2.7}$$

reprezintă toate soluţiile ecuaţiei (2.4) în cazul în care ecuaţia (2.5) are rădăcini reale distincte.

Dacă ecuaţia (2.5) are rădăcinile confundate $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ atunci pe lângă funcţia $x_1(t) = C_1e^{\lambda t}$ şi funcţia $x_2(t) = C_2t \cdot e^{\lambda t}$ este soluţie a ecuaţiei (2.4). Prin urmare orice funcţia $x(t)$ de forma

$$x(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2t \cdot e^{\lambda t}$$

adică

$$x(t) = e^{\lambda t} \cdot (C_1 + C_2t) \tag{2.8}$$

este soluţie a ecuaţiei (2.4).

Mai mult, pentru orice $t_0, x_0^0, x_0^1 \in I\!R^1$ putem determina în mod unic constantele C_1 şi C_2 astfel încât să aibe loc $x(t_0) = x_0^0$ şi $\dot{x}(t_0) = x_0^1$.

În adevăr, impunând aceste condiţii funcţiei dată de (2.8) rezultă următorul sistem de ecuaţii algebrice:

$$\begin{array}{rcl} x_0^0 & = & e^{\lambda t_0}(C_1 + C_2t_0) \\ x_0^1 & = & \lambda e^{\lambda t_0} \cdot C_1 + C_2e^{\lambda t_0} + e^{\lambda t_0} \cdot t_0 \cdot \lambda \cdot C_2 \end{array}$$

al cărui determinant este $e^{2\lambda t_0} \neq 0$.

În particular rezultă de aici că, formula (2.8) reprezintă toate soluţiile ecuaţiei (2.4) în cazul în care ecuaţia (2.5) are rădăcinile confundate.

Rămâne să considerăm cazul în care ecuaţia (2.5) are rădăcinile complex conjugate $\lambda_1 = \mu + i\nu$ şi $\lambda_2 = \mu - i\nu$. În acest caz considerăm funcţiile

$$x_1(t) = C_1e^{\mu t} \cdot \cos \nu t \;\; \text{şi} \;\; x_2(t) = C_2e^{\mu t} \cdot \sin \nu t$$

(C_1, C_2 constante reale) şi arătăm că fiecare din acestea este soluţie a ecuaţiei (2.4).

Demonstraţia se face prin verificare. Pentru exemplificare facem acest calcul în cazul funcţiei $x_1(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= C_1\mu \cdot e^{\mu t} \cdot \cos\nu t - C_1\nu \cdot e^{\mu t} \cdot \sin\nu t \\ \ddot{x}_1(t) &= C_1\mu^2 \cdot e^{\mu t} \cdot \cos\nu t - 2C_1\mu\nu \cdot e^{\mu t} \cdot \sin\nu t - C_1\nu^2 \cdot e^{\mu t} \cdot \cos\nu t\end{aligned}$$

şi înlocuind în ecuaţia (2.5) avem:

$$\begin{aligned}a_2\ddot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + a_0x_1 &= C_1 \cdot e^{\mu t} \cdot \cos\nu t\left[(\mu^2 - \nu^2)a_2 + \mu a_1 + a_0\right] + \\ &+ \ C_1 \cdot e^{\mu t} \cdot \sin\nu t\left[-2\mu\nu a_2 - \nu a_1\right].\end{aligned}$$

Deoarece

$$a_2(\mu + i\nu)^2 + a_1(\mu + i\nu) + a_0 = 0$$

avem

$$(\mu^2 - \nu^2)a_2 + \mu a_1 + a_0 + i\left[2\mu\nu a_2 + \nu a_1\right] = 0$$

şi prin urmare:

$$(\mu^2 - \nu^2)a_2 + \mu a_1 + a_0 = 0 \quad \text{şi} \quad 2\mu\nu a_2 + \nu a_1 = 0.$$

Ţinând seama de aceste egalităţi deducem egalitatea

$$a_2\ddot{x}_1 + a_1\dot{x}_1 + a_0x_1 = 0$$

care arată că funcţia $x_1(t) = C_1 \cdot e^{\mu t} \cdot \cos\nu t$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale (2.4).

La fel se arată că funcţia $x_2(t) = C_2 \cdot e^{\mu t} \cdot \sin\nu t$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale (2.4).

Astfel, rezultă că orice funcţie

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\mu t} \cdot \cos\nu t + C_2 \cdot e^{\mu t} \cdot \sin\nu t \tag{2.9}$$

este soluţie a ecuaţiei (2.4).

Arătăm în continuare că pentru orice $t_0, x_0^0, x_0^1 \in I\!R^1$ putem determina constantele C_1 şi C_2 în mod unic astfel încât să aibe loc $x(t_0) = x_0^0$ şi $\dot{x}(t_0) = x_0^1$.

Impunând aceste condiţii funcţiei (2.9) rezultă următorul sistem de ecuaţii algebrice:

$$\begin{aligned} x_0^0 &= e^{\mu t_0} \cdot [C_1 \cdot \cos \nu t_0 + C_2 \cdot \sin \nu t_0] \\ x_0^1 &= e^{\mu t_0} \cdot [C_1 \cdot (\mu \cos \nu t_0 - \nu \sin \nu t_0) + C_2 \cdot (\mu \sin \nu t_0 + \nu \cos \nu t_0)] \end{aligned}$$

având ca necunoscute constantele C_1, C_2.

Determinantul acestui sistem algebric este $\nu \cdot e^{2\mu t_0}$ şi este diferit de zero.

În particular, rezultă de aici că formula (2.9) reprezintă toate soluţiile ecuaţiei (2.4) în cazul în care ecuaţia (2.5) are rădăcinile complexe.

Am ajuns în acest fel să determinăm toate soluţiile ecuaţiei (2.4).

Aceasta însă nu permite încă să rezolvăm problema 2.1.1 pusă la începutul paragrafului, pentru că aceasta conduce de fapt la ecuaţia (2.3), adică:

$$a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = f(t)$$

în care funcţia f este dată.

Reamintim că, deosebirea dintre ecuaţiile (2.4) şi (2.3) constă în faptul că în membrul drept al ecuaţiei (2.3) este o funcţie continuă care nu neapărat este funcţia identic nulă, adică este o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi neomogenă.

Pentru determinarea soluţiilor ecuaţiei (2.3) este important să observăm la început că, dacă $\widetilde{x}(t)$ este o soluţie fixată a ecuaţiei (2.3) şi $x(t)$ este o soluţie oarecare a aceleiaşi ecuaţii, atunci diferenţa

$$\widetilde{x}(t) = x(t) - \overline{x}(t)$$

este o soluţie oarecare a ecuaţiei (2.4). Întrucât soluţiile $\widetilde{x}(t)$ ale ecuaţiei (2.4) sunt cunoscute, determinarea soluţiilor $x(t)$ ale ecuaţiei (2.3) revine la determinarea unei singure soluţii $\overline{x}(t)$ ale acestei ecuaţii.

O soluţie particulară $\overline{x}(t)$ pentru ecuaţia (2.3) se determină cu metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange (un procedeu asemănător cu cel descris în Cap 1 § 6).

În continuare prezentăm această metodă în cazul în care ecuaţia algebrică (2.5) are rădăcinile reale distincte λ_1, λ_2. În acest caz soluţiile ecuaţiei omogene (2.4) se scriu sub forma (2.7):

$$\widetilde{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Soluţia particulară $\overline{x}(t)$ a ecuaţiei neomogene (2.3) se caută sub aceeaşi formă considerând însă C_1, C_2 funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ de variabila t:

$$\overline{x}(t) = C_1(t)e^{\lambda_1 t} + C_2(t)e^{\lambda_2 t} \tag{2.10}$$

Pentru a impune funcţiei $\overline{x}(t)$ să verifice ecuaţia (2.3) calculăm derivata acesteia şi obţinem:

$$\dot{\overline{x}}(t) = \dot{C}_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dot{C}_2(t)e^{\lambda_2 t} + C_1(t)\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2(t)\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \tag{2.11}$$

În continuare ar trebui să calculăm derivata de ordinul al doilea $\ddot{\overline{x}}$ prin derivare în raport cu t în expresia (2.11). Aceasta ar introduce derivatele de ordinul al doilea ale funcţiilor $C_1(t), C_2(t)$ de existenţa cărora nu ne-am asigurat. De aceea impunem condiţia suplimentară:

$$\dot{C}_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dot{C}_2(t)e^{\lambda_2 t} = 0 \tag{2.12}$$

Cu aceasta (2.11) devine:

$$\dot{\overline{x}}(t) = C_1(t)\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2(t)\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \tag{2.13}$$

iar prin derivare obţinem:

$$\ddot{\overline{x}}(t) = \dot{C}_1(t)\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{C}_2(t)\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + C_1(t)\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + C_2(t)\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t}. \tag{2.14}$$

Înlocuind (2.13) şi (2.14) în (2.3) rezultă:

$$\begin{aligned} C_1(t)(a_2\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0)e^{\lambda_1 t} &+ C_2(t)(a_2\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0)e^{\lambda_2 t} + \\ &+ \dot{C}_1(t)a_2\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{C}_2(t)a_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} = f(t) \end{aligned}$$

sau

$$\dot{C}_1(t)\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{C}_2(t)\lambda_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{1}{a_2} f(t) \tag{2.15}$$

Astfel, sistemul de ecuaţii algebrice format din ecuaţiile (2.12) şi (2.15):

$$\begin{array}{ccccc} \dot{C}_1(t)e^{\lambda_1 t} & + & \dot{C}_2(t)e^{\lambda_2 t} & = & 0 \\ \dot{C}_1(t)\lambda_1 e^{\lambda_1 t} & + & \dot{C}_2(t)\lambda_2 e^{\lambda_2 t} & = & \dfrac{1}{a_2} f(t) \end{array} \tag{2.16}$$

în care necunoscutele sunt $\dot{C}_1(t), \dot{C}_2(t)$ (derivatele funcţiilor $C_1(t)$ şi $C_2(t)$), are determinantul $(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \neq 0$ şi permite determinarea funcţiilor $\dot{C}_1(t)$ şi $\dot{C}_2(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= -\frac{1}{a_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot f(t) \\ \dot{C}_2(t) &= \frac{1}{a_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot f(t) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Rezultă de aici că funcţiile $C_1(t)$ şi $C_2(t)$ sunt date de:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -\frac{1}{a_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_{t^*}^{t} e^{-\lambda_1 \tau} \cdot f(\tau) d\tau \\ C_2(t) &= \frac{1}{a_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_{t^*}^{t} e^{-\lambda_2 \tau} \cdot f(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{2.18}$$

iar soluţia particulară a ecuaţiei neomogene (2.3) este:

$$\begin{aligned} \overline{x}(t) &= -\frac{1}{a_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot e^{\lambda_1 t} \int_{t^*}^{t} e^{-\lambda_1 \tau} \cdot f(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{a_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot e^{\lambda_2 t} \int_{t^*}^{t} e^{-\lambda_2 \tau} \cdot f(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Rezultă că o soluţie oarecare a ecuaţiei (2.3) este dată de

$$x(t) = \widetilde{x}(t) + \overline{x}(t)$$

adică:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{1}{a_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot e^{\lambda_1 t} \int_{t^*}^{t} e^{-\lambda_1 \tau} \cdot f(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{a_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \cdot e^{\lambda_2 t} \int_{t^*}^{t} e^{-\lambda_2 \tau} \cdot f(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{2.20}$$

Făcând un raţionament asemănător în cazul în care ecuaţia algebrică (2.5) are rădăcini reale egale $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, pentru ecuaţia (2.3) găsim soluţia particulară:

$$\overline{x}(t) = e^{\lambda t} \left[-\frac{1}{a_2} \int_{t^*}^{t} e^{-\lambda \tau} \cdot \tau \cdot f(\tau) d\tau + \frac{t}{a_2} \int_{t^*}^{t} e^{-\lambda \tau} \cdot f(\tau) d\tau \right]$$

şi soluţia generală

$$x(t) = e^{\lambda_1 t}(C_1 + C_2 t) +$$

$$+ e^{\lambda t}\left[-\frac{1}{a_2}\int_{t^*}^{t} e^{-\lambda\tau}\cdot\tau\cdot f(\tau)d\tau + \frac{t}{a_2}\int_{t^*}^{t} e^{-\lambda\tau}\cdot f(\tau)d\tau\right] \quad (2.21)$$

În cazul în care ecuaţia algebrică (2.5) are rădăcinile complexe $\lambda_1 = \mu + i\nu$ şi $\lambda_1 = \mu - i\nu$, cu metoda variaţiei constantelor găsim soluţia particulară:

$$\begin{aligned}\overline{x}(t) &= -\frac{1}{a_2\nu}\cdot e^{\mu t}\cdot\cos\nu t\int_{t^*}^{t} e^{-\mu\tau}\cdot\sin\nu\tau\cdot f(\tau)d\tau + \\ &+ \frac{1}{a_2\nu}\cdot e^{\mu t}\cdot\sin\nu t\int_{t^*}^{t} e^{-\mu\tau}\cdot\cos\nu\tau\cdot f(\tau)d\tau\end{aligned}$$

şi soluţia generală

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 e^{\mu t}\cdot\cos\nu t + C_2 e^{\mu t}\cdot\sin\nu t - \\ &- \frac{1}{a_2\nu}\cdot e^{\mu t}\cdot\cos\nu t\int_{t^*}^{t} e^{-\mu\tau}\cdot\sin\nu\tau\cdot f(\tau)d\tau + \\ &+ \frac{1}{a_2\nu}\cdot e^{\mu t}\cdot\sin\nu t\int_{t^*}^{t} e^{-\mu t}\cdot\cos\nu\tau\cdot f(\tau)d\tau \quad (2.22)\end{aligned}$$

În general pentru orice $t_0, x_0^0, x_0^1 \in I\!R^1$ putem determina constantele C_1 şi C_2 din formula de reprezentare a soluţiei $x(t)$ a ecuaţiei neomogene ((2.20), (2.21), (2.22)) astfel încât să avem $x(t_0) = x_0^0$ şi $\dot{x}(t_0) = x_0^1$.

Folosind una din formulele (2.20), (2.21), (2.22), determinată de natura rădăcinilor ecuaţiei $L\cdot\lambda^2 + R\cdot\lambda + \frac{1}{C} = 0$, putem determina toate soluţiile ecuaţiei $(*)$ din problema 2.1.1. Cunoscând valoarea i_0 a curentului la momentul t_0 şi valoarea variaţiei curentului i_0^1 la momentul t_0, se determină constantele C_1 şi C_2 din formulele de reprezentare a soluţiei astfel încât soluţia oarecare $i(t)$ a ecuaţiei să verifice condiţiile iniţiale $i(t_0) = i_0$ şi $\dot{i}(t_0) = i_0^1$.

Exerciţii

1. Rezolvaţi următoarele probleme cu date iniţiale:

   a) $\ddot{x} - x = 0 \qquad x(0) = 2, \;\; \dot{x}(0) = 0$

$$\textbf{R:}\quad x(t) = e^t + e^{-t}$$

b) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1$

$$\textbf{R:}\quad x(t) = t \cdot e^{-t}$$

c) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0 \quad x(1) = 1, \quad \dot{x}(1) = 0$

$$\textbf{R:}\quad x(t) = 3e^{2t-2} - 2t \cdot e^{2t-2}$$

d) $\ddot{x} + x = 0 \qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\textbf{R:}\quad x(t) = \sin t$$

e) $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1$

$$\textbf{R:}\quad x(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}t\right)$$

2. Rezolvaţi următoarele ecuaţii diferenţiale :

a) $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = \dfrac{1}{1+e^t}$

$$\textbf{R:}\quad x(t) = e^{-t} \cdot \ln(1+e^t) + e^{-2t} \cdot \ln(1+e^t) - e^{-2t} \cdot C_1 + e^{-t} \cdot C_2$$

b) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = \dfrac{9t^2 + 6t + 2}{t^3}$

$$\textbf{R:}\quad x(t) = e^{3t} \cdot C_1 + t \cdot e^{3t} \cdot C_2 + \frac{1}{t}$$

c) $\ddot{x} + x = \dfrac{e^t}{2} + \dfrac{e^{-t}}{2}$

$$\textbf{R:}\quad x(t) = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t + \frac{1}{4}(e^{2t} + 1) \cdot e{-}t$$

d) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^{2t}$

$$\textbf{R:}\quad x(t) = (2te^t - 2e^t + C_1e^t + C_2)e^t$$

e) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 1 + e^t + e^{2t}$

R: $x(t) = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 t \cdot e^{2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t} + e^t$

$f)$ $\ddot{x} + x = \sin t + \cos 2t$

R: $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t - \frac{2}{3} \cos t^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} t \cos t$

$g)$ $\ddot{x} - 2(1+m)\dot{x} + (m^2 + 2m)x = e^t + e^{-t}, \qquad m \in I\!R^1$

R: $x(t) = C_1 \cdot e^{mt} + C_2 \cdot e^{(m+2)t} + \frac{((m+3)e^{2t} + m - 1) \cdot e^{-t}}{m^3 + 3m^2 - m - 3}$

$h)$ $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 6t^2 - 10t + 2$

R: $x(t) = C_1 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot e^{2t} + t^2$

$i)$ $\ddot{x} - 5\dot{x} = -5t^2 + 2t$

R: $x(t) = \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} e^{5t} \cdot C_1 + C_2$

$j)$ $\ddot{x} + x = te^{-t}$

R: $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{1}{2}(-1 + t) \cdot e^t$

$k)$ $\ddot{x} - x = te^t + t + t^3 e^{-t}$

R: $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + \frac{1}{16}(-4te^{2t} + 2e^{2t} - 16te^t - 2t^4 +$
$+ 4t^2 e^{2t} - 4t^3 - 6t^2 - 6t - 3) \cdot e^{-t}$

$l)$ $\ddot{x} - 7\dot{x} + 6x = \sin t$

R: $x(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{6t} + \frac{7}{74} \cos t + \frac{5}{74} \sin t$

$m)$ $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = \sin t \cdot \cos 2t$

R: $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} - \frac{10}{169} \sin t \cdot \cos t^2 - \frac{191}{4225} \sin t +$
$+ \frac{24}{169} \cos t^3 - \frac{788}{4225} \cos t$

$n)$ $\ddot{x} + x = \cos t - \cos 3t$

$$\mathbf{R:}\ \ x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + \frac{1}{2} \cdot t \sin t + \frac{1}{2} \cos t^3 - \frac{1}{8} \cos t$$

2.2 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n cu coeficienţi constanţi

O ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi este o ecuaţie diferenţială de forma

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = f(t) \tag{2.23}$$

în care $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sunt constante reale cunoscute, $a_n \neq 0$, $f(t)$ funcţie cunoscută continuă şi x este funcţie reală de clasă $\mathcal{C}^n$ necunoscută.

Observaţia 2.2.1 Dacă $f = 0$, atunci ecuaţia (2.23) se numeşte ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi omogenă, iar dacă $f \neq 0$ ecuaţia (2.23) se numeşte ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi neomogenă.

Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă ataşată ecuaţiei (2.23):

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \tag{2.24}$$

Pentru determinarea soluţiilor ecuaţiei (2.24) se caută soluţii de forma $x(t) = C \cdot e^{\lambda t}$. Impunând unei asemenea funcţii să verifice ecuaţia (2.24) rezultă că λ trebuie să verifice ecuaţia algebrică

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{2.25}$$

numită ecuaţie caracteristică.

Dacă ecuaţia (2.25) are toate rădăcinile reale şi distincte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ atunci funcţiile $x_i(t) = C_i \cdot e^{\lambda_i t}, i = \overline{1, n}$ sunt soluţii ale ecuaţiei (2.24) şi orice funcţie $x(t)$ dată de:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n \cdot e^{\lambda_n t} \tag{2.26}$$

este soluţie a ecuaţiei (2.24) ($C_1, C_2, \ldots, C_n$ sunt constante reale oarecare).

Mai mult, oricare ar fi $t_0, x_0^0, x_0^1, ..., x_0^{n-1} \in I\!R^1$ putem determina în mod unic constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ astfel încât să aibă loc

$$x(t_0) = x_0^0, \;\; \dot{x}(t_0) = x_0^1, \; \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}.$$

În particular rezultă de aici că formula (2.26) reprezintă toate soluţiile ecuaţiei (2.24) în acest caz.

Dacă printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice (2.25) există şi rădăcini complexe simple, de exemplu $\lambda = \mu + i\nu$ şi $\overline{\lambda} = \mu - i\nu$, atunci fiecărei perechi de rădăcini complex conjugate îi corespund soluţiile

$$x_\lambda^1(t) = C_\lambda^1 \cdot e^{\mu t} \cdot \cos \nu t \quad \text{şi} \quad x_\lambda^2(t) = C_\lambda^2 \cdot e^{\mu t} \cdot \sin \nu t$$

Pentru $\mu = 0$ aceste soluţii devin:

$$x_\lambda^1(t) = C_\lambda^1 \cdot \cos \nu t \quad \text{şi} \quad x_\lambda^2(t) = C_\lambda^2 \cdot \sin \nu t$$

Astfel, dacă ecuaţia caracteristică are *2k* rădăcini complexe simple $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$ şi $\overline{\lambda_j} = \mu_j - i\nu_j$, $j = \overline{1,k}$ şi $n-2k$ rădăcini reale simple $\lambda_{2k+1}, \ldots, \lambda_n$, atunci orice funcţie $x(t)$ dată de:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} C_j^1 \cdot e^{\mu_j t} \cdot \cos \nu_j t + \sum_{j=1}^{k} C_j^2 \cdot e^{\mu_j t} \cdot \sin \nu_j t + \sum_{j=2k+1}^{n} C_j \cdot e^{\lambda_j t} \qquad (2.27)$$

este soluţie a ecuaţiei (2.24) ($C_j^1, C_j^2, j = \overline{1,k}$ şi $C_j, j = \overline{2k+1,n}$ sunt constante reale oarecare).

Mai mult, oricare ar fi $t_0, x_0^0, x_0^1, ..., x_0^{n-1} \in I\!R^1$ putem determina în mod unic constantele $C_j^1, C_j^2,\ j = \overline{1,k}$ şi $C_j, j = \overline{2k+1,n}$ astfel încât să aibă loc $x(t_0) = x_0^0,\ \dot{x}(t_0) = x_0^1, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}$. În particular rezultă de aici că formula (2.27) reprezintă toate soluţiile ecuaţiei (2.24) în acest caz.

Dacă ecuaţia caracteristică (2.25) are k rădăcini reale $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ având ordine de multiplicitate $q_1, \ldots, q_k$ şi l rădăcini complex conjugate $\mu_1 \pm i\nu_1, \ldots, \mu_l \pm i\nu_l$ având ordine de multiplicitate $r_1, \ldots, r_l$, atunci orice funcţie $x(t)$ dată de formula:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t} \cdot P_{q_j-1}(t) + \sum_{j=1}^{l} e^{\mu_j t} \cdot \left[Q_{r_j-1}(t) \cdot \cos \nu_j t + R_{r_j-1}(t) \cdot \sin \nu_j t\right] \qquad (2.28)$$

este soluţie a ecuaţiei (2.24), unde $P_{q_j-1}(t)$ sunt polinoame de grad $q_j - 1$ cu coeficineţi reali nedeterminaţi şi Q_{r_j-1}, R_{r_j-1} sunt polinoame de grad $r_j - 1$ cu coeficienţi reali nedeterminaţi.

Mai mult, oricare ar fi $t_0, x_0^1, x_0^2, ..., x_0^{n-1} \in I\!R^1$ putem determina în mod unic coeficienţii polinoamelor $P_{q_j-1}, Q_{q_j-1}, R_{q_j-1}$ astfel încât să aibă loc $x(t_0) = x_0^1, \dot{x}(t_0) = x_0^2, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}$.

În particular rezultă de aici că formula (2.28) reprezintă toate soluţiile ecuaţiei (2.24) în acest caz.

Reamintim că obiectul acestui paragraf este rezolvarea ecuaţiei diferenţiale de ordinul n, cu coeficienţi constanţi neomogenă (2.23):

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = f(t)$$

în care $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sunt constante reale date, $a_n \neq 0$, f funcţie cunoscută continuă şi x este funcţie reală de clasă $\mathcal{C}^n$ necunoscută.

Pentru determinarea soluţiilor ecuaţiei (2.23) este important să observăm că dacă $\overline{x}(t)$ este o soluţie fixată a ecuaţiei (2.23) şi $x(t)$ este o soluţie oarecare a aceleiaşi ecuaţii, atunci diferenţa $\overline{x}(t) - x(t) = \widetilde{x}(t)$ este o soluţie oarecare a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi, (2.24). Întrucât soluţiile $\widetilde{x}(t)$ ale ecuaţiei omogene (2.24) sunt date în general de (2.28), determinarea soluţiilor $x(t)$ ale ecuaţiei (2.23) revine la determinarea unei singure soluţii $\overline{x}(t)$ ale acestei ecuaţii.

O soluţie particulară $\overline{x}(t)$ pentru ecuaţia (2.23) se determină cu metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange, un procedeu asemenător cu cel descris în paragraful precedent.

Vom ilustra acest procedeu pe un exemplu ($n = 3$):

Exemplul 2.2.1 Să se determine soluţiile ecuaţiei:

$$\dddot{x} + 4\ddot{x} + 5\dot{x} = 4e^t$$

Considerăm ecuaţia omogenă

$$\dddot{x} + 4\ddot{x} + 5\dot{x} = 0$$

Ecuaţia caracteristică asociată este:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda = 0$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = -2 - i, \lambda_2 = -2 + i.$$

Soluţiile ecuaţiei omogene sunt date de:

$$y(t) = C_1 + C_2 \cdot e^{-2t} \cdot \cos t + C_3 \cdot e^{-2t} \cdot \sin t.$$

Căutăm $\overline{x}(t)$, o soluţie particulară pentru ecuaţia neomogenă, sub forma

$$\overline{x}(t) = C_1(t) + C_2(t) \cdot e^{-2t} \cdot \cos t + C_3(t) \cdot e^{-2t} \cdot \sin t$$

în care $C_1(t), C_2(t), C_3(t)$ sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ care trebuiesc determinate.

Calculăm derivata întâi a funcţiei $\overline{x}(t)$ şi obţinem:

$$\begin{aligned}\dot{\overline{x}} &= \dot{C}_1 + \dot{C}_2 \cdot e^{-2t} \cdot \cos t + \dot{C}_3 \cdot e^{-2t} \cdot \sin t - 2C_2 \cdot e^{-2t} \cdot \cos t - \\ &- 2C_3 \cdot e^{-2t} \cdot \sin t - C_2 \cdot e^{-2t} \cdot \sin t + C_3 \cdot e^{-2t} \cdot \cos t\end{aligned}$$

Impunem ca $\dot{C}_1, \dot{C}_2, \dot{C}_3$ să verifice:

$$\dot{C}_1 + \dot{C}_2 \cdot e^{-2t} \cdot \cos t + \dot{C}_3 \cdot e^{-2t} \cdot \sin t = 0$$

şi obţinem:

$$\dot{\overline{x}} = -C_2 \cdot e^{-2t} \cdot (2\cos t + \sin t) + C_3 \cdot e^{-2t} \cdot (\cos t - 2\sin t)$$

Calculăm derivata a doua a funcţiei $\overline{x}(t)$ şi obţinem:

$$\begin{aligned}\ddot{\overline{x}} &= -\dot{C}_2 \cdot e^{-2t} \cdot (2\cos t + \sin t) + \dot{C}_3 \cdot e^{-2t} \cdot (\cos t - 2\sin t) + \\ &\quad +2C_2 \cdot e^{-2t} \cdot (2\cos t + \sin t) - 2C_3 \cdot e^{-2t} \cdot (\cos t - 2\sin t) - \\ &\quad -C_2 \cdot e^{-2t} \cdot (-2\sin t + \cos t) + C_3 \cdot e^{-2t} \cdot (-\sin t - 2\cos t) = \\ &= -\dot{C}_2 \cdot e^{-2t} \cdot (2\cos t + \sin t) + \dot{C}_3 \cdot e^{-2t} \cdot (\cos t - 2\sin t) + \\ &\quad +C_2 \cdot e^{-2t} \cdot (3\cos t + 4\sin t) + C_3 \cdot e^{-2t} \cdot (3\sin t - 4\cos t).\end{aligned}$$

Impunem ca $\dot{C}_2, \dot{C}_3$ să verifice:

$$-\dot{C}_2 \cdot e^{-2t} \cdot (2\cos t + \sin t) + \dot{C}_3 \cdot e^{-2t} \cdot (\cos t - 2\sin t) = 0$$

şi obţinem

$$\ddot{\overline{x}} = C_2 \cdot e^{-2t} \cdot (3\cos t + 4\sin t) + C_3 \cdot e^{-2t} \cdot (3\sin t - 4\cos t)$$

De aici calculăm derivata a treia a funcţiei $\overline{x}(t)$ şi obţinem:

$$\begin{aligned}\dddot{\overline{x}} &= \dot{C}_2 \cdot e^{-2t} \cdot (3\cos t + 4\sin t) + \dot{C}_3 \cdot e^{-2t} \cdot (3\sin t - 4\cos t) - \\ &\quad -2C_2 \cdot e^{-2t} \cdot (3\cos t + 4\sin t) - 2C_3 \cdot e^{-2t} \cdot (3\sin t - 4\cos t) + \\ &\quad +C_2 \cdot e^{-2t} \cdot (-3\sin t + 4\cos t) + C_3 \cdot e^{-2t} \cdot (3\cos t + 4\sin t) = \\ &= \dot{C}_2 \cdot e^{-2t} \cdot (3\cos t + 4\sin t) + \dot{C}_3 \cdot e^{-2t} \cdot (3\sin t - 4\cos t) + \\ &\quad +C_2 \cdot e^{-2t} \cdot (-2\cos t - 11\sin t) + C_3 \cdot e^{-2t} \cdot (-2\sin t + 11\cos t).\end{aligned}$$

Înlocuind toate acestea în ecuaţia dată rezultă:

$$\begin{array}{llc}\dot{C}_2 \cdot e^{-2t} \cdot (3\cos t + 4\sin t) & +\dot{C}_3 \cdot e^{-2t} \cdot (3\sin t - 4\cos t) & + \\ +C_2 \cdot e^{-2t} \cdot (-2\cos t - 11\sin t) & +C_3 \cdot e^{-2t} \cdot (-2\sin t + 11\cos t) & + \\ +C_2 \cdot e^{-2t} \cdot (12\cos t + 16\sin t) & +C_3 \cdot e^{-2t} \cdot (12\sin t - 16\cos t) & - \\ -C_2 \cdot e^{-2t} \cdot (10\cos t + 5\sin t) & +C_3 \cdot e^{-2t} \cdot (5\cos t - 10\sin t) & = 4e^t\end{array}$$

sau

$$\dot{C}_2 \cdot e^{-2t} \cdot (3\cos t + 4\sin t) + \dot{C}_3 \cdot e^{-2t} \cdot (3\sin t - 4\cos t) = 4e^t$$

Această egalitate împreună cu sistemul de condiţii impus pe parcurs funcţiilor $\dot{C}_1, \dot{C}_2, \dot{C}_3$ conduce la următorul sistem liniar de ecuaţii algebrice în necunoscutele $\dot{C}_1, \dot{C}_2, \dot{C}_3$:

$$\begin{cases} \dot{C}_1 & +\dot{C}_2 \cdot e^{-2t} \cdot \cos t & +\dot{C}_3 \cdot e^{-2t} \cdot \sin t & = 0 \\ & -\dot{C}_2 \cdot e^{-2t} \cdot (2\cos t + \sin t) & +\dot{C}_3 \cdot e^{-2t} \cdot (\cos t - 2\sin t) & = 0 \\ & \dot{C}_2 \cdot e^{-2t} \cdot (3\cos t + 4\sin t) & +\dot{C}_3 \cdot e^{-2t} \cdot (-4\cos t + 3\sin t) & = 4e^t \end{cases}$$

Din ultimele două ecuaţii rezulă sistemul algebric:

$$\begin{cases} \dot{C}_2 \cdot (-2\cos t - \sin t) & +\dot{C}_3 \cdot (\cos t - 2\sin t) & = 0 \\ \dot{C}_2 \cdot (3\cos t + 4\sin t) & +\dot{C}_3 \cdot (-4\cos t + 3\sin t) & = 4e^{-t} \end{cases}$$

Determinantul sistemului este:

$$\begin{array}{rcl}\Delta & = & (-2\cos t - \sin t)(-4\cos t + 3\sin t) \\ & - & (\cos t - 2\sin t)(3\cos t + 4\sin t) = \\ & = & 8\cos^2 t - 6\sin t\cos t + 4\sin t\cos t - 3\sin^2 t - 3\cos^2 t - \\ & - & 4\sin t\cos t + 6\sin t\cos t + 8\sin^2 t = 8 - 3 = 5\end{array}$$

şi soluţiile sunt date de:

$$\dot{C}_2 = -\frac{4}{5} \cdot e^t(\cos t - 2\sin t) \qquad \dot{C}_3 = \frac{4}{5} \cdot e^t(-2\cos t - \sin t).$$

Înlocuind $\dot{C}_2, \dot{C}_3$ în prima ecuaţie, se obţine $\dot{C}_1$:

$$\begin{aligned}\dot{C}_1 &= \frac{4}{5}\cdot e^{-t}\cos t(\cos t - 2\sin t) + \frac{4}{5}\cdot e^{-t}\sin t(2\cos t + \sin t) = \\ &= \frac{4}{5}\cdot e^{-t}[\cos^2 t + \sin^2 t] = \\ &= \frac{4}{5}\cdot e^{-t}\end{aligned}$$

Astfel au fost găsite derivatele funcţiilor necunoscute $\dot{C}_1, \dot{C}_2, \dot{C}_3$:

$$\begin{aligned}\dot{C}_1 &= \frac{4}{5}\cdot e^{-t} \\ \dot{C}_2 &= -\frac{4}{5}\cdot e^{t}[\cos t - 2\sin t] \\ \dot{C}_3 &= -\frac{4}{5}\cdot e^{t}[2\cos t + \sin t]\end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$\begin{aligned}C_1 &= -\frac{4}{5}\cdot e^{-t} \\ C_2 &= \frac{1}{10}\cdot e^{t}[-12\cos t + 4\sin t] \\ C_3 &= \frac{1}{10}\cdot e^{t}[4\cos t + 12\sin t]\end{aligned}$$

Obţinem de aici:

$$\begin{aligned}\overline{x}(t) &= -\frac{4}{5}\cdot e^{-t} + \frac{1}{10}\cdot e^{-t}[-12\cos t + 4\sin t]\cdot\cos t + \\ &+ \frac{1}{10}\cdot e^{-t}[4\cos t + 12\sin t]\cdot\sin t\end{aligned}$$

de unde avem că soluţia generală a ecuaţiei neomogene

$$x(t) = \widetilde{x}(t) + \overline{x}(t)$$

este:

$$\begin{aligned}\overline{x}(t) &= C_1 + c_2e^{-2t}\cos t + C_3e^{-2t}\sin t - \frac{4}{5}\cdot e^{-t} + \\ &+ \frac{1}{10}\cdot e^{-t}[-12\cos t + 4\sin t]\cdot\cos t + \\ &+ \frac{1}{10}\cdot e^{-t}[4\cos t + 12\sin t]\cdot\sin t\end{aligned}$$

Exerciţii

1. Rezolvaţi următoarele ecuaţii diferenţiale (cu calculatorul):

$a)$ $\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$

R: $x(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{2t} + C_3 \cdot e^{-t}$

$b)$ $x^{(4)} - 5\ddot{x} + 4x = 0$

R: $x(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{2t} + C_3 \cdot e^{-t} + C_4 \cdot e^{-2t}$

$c)$ $\dddot{x} - 6\ddot{x} + 12\dot{x} - 8x = 0$

R: $x(t) = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot t \cdot e^{2t} + C_3 \cdot t^2 \cdot e^{2t}$

$d)$ $x^{(7)} + 3x^{(6)} + 3x^{(5)} + x^{(4)} = 0$

R: $x(t) = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-t} + C_3 \cdot t^2 \cdot e^{-t} + C_4 + C_5 \cdot t + C_6 \cdot t^2 + C_7 \cdot t^3$

$e)$ $\dddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = 0$

R: $x(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \sin t + C_3 \cos t$

$f)$ $x^{(4)} + 2\ddot{x} + x = 0$

R: $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 t \cdot \sin t + C_4 t \cdot \cos t$

$g)$ $x^{(4)} - 3\dddot{x} + 5\ddot{x} - 3\dot{x} + 4x = 0$

R: $$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 e^{\frac{3}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) +$$
$$+ C_4 e^{\frac{3}{2}t} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

2. Determinaţi soluţiile următoarelor probleme cu date iniţiale:

$a)$ $\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0 \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1 \quad \ddot{x}(0) = 2$

$$\mathbf{R:}\ \ x(t) = -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t}$$

b) $\dddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = 0 \quad x(1) = 0, \quad \dot{x}(1) = 1 \quad \ddot{x}(1) = 2$

$$\mathbf{R:}\ \ x(t) = e^{t-1} - (\sin 1)\cdot \sin t - (\cos 1)\cdot \cos t$$

c) $x^{(4)} - 5\ddot{x} + 4x = 0 \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1 \quad \ddot{x}(0) = 2, \dddot{x}(0) = 3$

$$\mathbf{R:}\ \ x(t) = -\frac{1}{6}\cdot e^{t} + \frac{1}{6}\cdot e^{-2t} - \frac{1}{2}\cdot e^{-t} + \frac{1}{2}\cdot e^{2t}$$

3. Rezolvaţi următoarele ecuaţii diferenţiale:

a) $\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = t + 1$

$$\mathbf{R:}\ \ x(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot t + C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}$$

b) $\dddot{x} - 6\ddot{x} + 12\dot{x} - 8x = \sin t$

$$\mathbf{R:}\ \ x(t) = -\frac{11}{125}\cos t - \frac{2}{125}\sin t + C_1e^{2t} + C_2t^2\cdot e^{2t} + C_3t^3\cdot e^{2t}$$

2.3 Reducerea ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul n a lui Euler la o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi

Definiţia 2.3.1 *Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul n de forma:*

$$a_n \cdot t^n \cdot x^{(n)} + a_{n-1} \cdot t^{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot t \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = 0 \qquad (2.29)$$

în care $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt constante reale, se numeşte ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n a lui Euler.

Propoziţia 2.3.1 *Prin schimbarea de variabilă $|t| = e^{\tau}$ ecuaţia diferenţială (2.29) se reduce la o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi.*

Demonstraţie: Fie $x = x(t)$ o soluţie a ecuaţiei (2.29) şi y funcţia $y(\tau) = x(e^{\tau})$. De aici, pentru $t > 0$, avem că $x(t) = y(\ln t)$ iar prin derivare succesivă obţinem:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{1}{t} \\
\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2y}{d\tau^2} \cdot \frac{1}{t^2} - \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2} \cdot \left(\frac{d^2y}{d\tau^2} - \frac{dy}{d\tau} \right) \\
\frac{d^3x}{dt^3} &= -\frac{2}{t^3} \cdot \left(\frac{d^2y}{d\tau^2} - \frac{dy}{d\tau} \right) + \frac{1}{t^3} \cdot \left(\frac{d^3y}{d\tau^3} - \frac{d^2y}{d\tau^2} \right) = \\
&= \frac{1}{t^3} \cdot \left(\frac{d^3y}{d\tau^3} - 3\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\frac{dy}{d\tau} \right)
\end{aligned}$$

Dacă presupunem că pentru $1 \leq k < n$ avem

$$\frac{d^kx}{dt^k} = \frac{1}{t^k} \cdot \sum_{i=1}^{k} c_i^k \cdot \frac{d^iy}{d\tau^i}$$

atunci printr-o nouă derivare deducem egalitatea

$$\frac{d^{k+1}x}{dt^{k+1}} = \frac{1}{t^{k+1}} \cdot \sum_{i=1}^{k+1} c_i^{k+1} \cdot \frac{d^iy}{d\tau^i}$$

Rezultă în acest fel că derivatele de orice ordin ($1 \leq k \leq n$) ale funcţiei x se exprimă ca un produs între $\frac{1}{t^{k+1}}$ şi o combinaţie liniară a derivatelor de ordin $i \leq k+1$ ale funcţiei y.

Înlocuind în (2.29) se obţine că funcţia y verifică o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi.

Se determină soluţiile $y = y(\tau)$ ale acestei ecuaţii şi apoi soluţiile $x(t)$ ale lui (2.29) pentru $t > 0$:

$$x(t) = y(\ln t).$$

Pentru $t < 0$ se raţionează la fel şi se obţine:

$$x(t) = y(\ln |t|).$$

Exerciţii:

Rezolvaţi următoarele ecuaţii diferenţiale:

1. $t^2\ddot{x} + t\dot{x} - x = 0$

$$\textbf{R:}\ \ x(t) = C_1 \cdot t + C_2 \cdot \frac{1}{t}$$

2. $12t^3\dddot{x} - 25t^2\ddot{x} + 28t\dot{x} - 6x = 0$

$$\textbf{R:}\ \ x(t) = C_1 \cdot t^2 + C_2 \cdot t^{\frac{1}{12}} + C_3 \cdot t^3$$

3. $t^2\ddot{x} + t\dot{x} = 0$

$$\textbf{R:}\ \ x(t) = C_1 + C_2 \cdot \ln t$$

4. $t^2\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0$

$$\textbf{R:}\ \ x(t) = C_1 \cdot t + C_2 \cdot t \cdot \ln t$$

2.4 Calculul simbolic al soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n

Pentru rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordin superior ($n \geq 2$) *Maple* foloseşte aceeaşi funcţie *dsolve* (solve ordinary differential equations - ODEs) care a fost prezentată în capitolul anterior.
Noutatea care apare aici constă în scrierea sintaxei pentru derivatele de ordin superior. De exemplu, derivata de ordinul al doilea a funcţiei $x(t)$ poate fi scrisă într-unul din următoarele moduri:

```
diff(x(t),t,t)

diff(x(t),t$2)

(D@@2)(x)(t)
```

Pentru exemplificare, vom rezolva câteva ecuaţii şi probleme cu date iniţiale:

1. Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi omogenă:

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0; \tag{2.30}$$

```
> eq1:=diff(x(t),t,t)-4*diff(x(t),t)+4*x(t)=0;
```

$$eq1 := \frac{d^2}{dt^2}x(t) - 4\,\frac{d}{dt}x(t) + 4\,x(t) = 0$$

```
> dsolve(eq1,x(t));
```

$$x(t) = _C1\, e^{2\,t} + _C2\, e^{2\,t} t$$

```
> dsolve({eq1,x(1)=1,D(x)(1)=0},x(t));
```

$$x(t) = 3\,\frac{e^{2\,t}}{e^2} - 2\,\frac{e^{2\,t}t}{e^2}$$

```
> sol1:=3*exp(2*t)/exp(2)-2*exp(2*t)*t/exp(2):
> plot(sol1,t=-infinity..infinity);
```

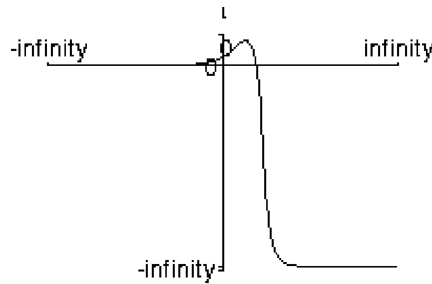


Figura 8

Se observă că, dacă nu s-a dat nici o condiţie iniţială soluţia generală este afişată cu ajutorul a două constante. Mai precis, numărul constantelor este acelaşi cu ordinul ecuaţiei, în cazul ecuaţiei de ordinul al doilea soluţia generală exprimându-se cu ajutorul a două constante.

Pentru ca *Maple* să afişeze soluţia unei Probleme Cauchy în cazul unei ecuaţii de ordin superior trebuie sa-i dăm n condiţii iniţiale:

$$x(t_0) = x_0^0,\ \ \dot{x}(t_0) = x_0^1,\ \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}.$$

2. Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al patrulea cu coeficienţi constanţi omogenă:

$$x^{(4)} - 5\ddot{x} + 4x = 0; \tag{2.31}$$

```
> eq2:=diff(x(t),t,t,t,t)-5*diff(x(t),t,t)+4*x(t)=0;
```

$$eq2 := \frac{d^4}{dt^4}x(t) - 5\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 4\,x(t) = 0$$

```
> eq2:=diff(x(t),t$4)-5*diff(x(t),t$2)+4*x(t)=0;
```

$$eq2 := \frac{d^4}{dt^4}x(t) - 5\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 4\,x(t) = 0$$

```
> eq2:=(D@@4)(x)(t)-5*(D@@2)(x)(t)+4*x(t)=0;
```

$$eq2 := \left(D^{(4)}\right)(x)(t) - 5\left(D^{(2)}\right)(x)(t) + 4\,x(t) = 0$$

```
> dsolve(eq2,x(t));
```

$$x(t) = _C1\,e^{-2\,t} + _C2\,e^{-t} + _C3\,e^{2\,t} + _C4\,e^{t}$$

```
> dsolve({eq2,x(0)=0,D(x)(0)=1,(D@@2)(x)(0)=2,
(D@@3)(x)(0)=3},x(t));
```

$$x(t) = -1/2\,e^{-t} + 1/6\,e^{-2\,t} + 1/2\,e^{2\,t} - 1/6\,e^{t}$$

```
> sol2:=-1/2*exp(-t)+1/6*exp(-2*t)+1/2*exp(2*t)-
        1/6*exp(t):
> plot(sol2,t=-2..2);
```

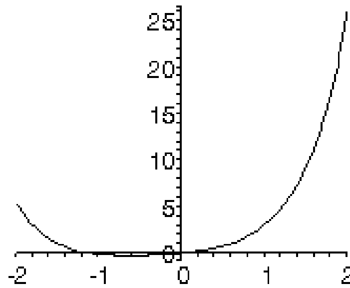


Figura 9

Din instrucţiunile de mai sus reiese că, în rezolvarea Problemei Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul patru s-au folosit patru condiţii iniţiale. Se observă deasemenea, sintaxa corespunzătoare derivatelor de ordin superior a fost scrisă în cele trei moduri prezentate la începutul paragrafului.

3. Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al treilea cu coeficienţi constanţi neomogenă:

$$\dddot{x} - 6\ddot{x} + 12\dot{x} - 8x = \sin t; \qquad (2.32)$$

```
> eq3:=diff(x(t),t,t,t)-6*diff(x(t),t,t)+12*diff(x(t),t)
        -8*x(t)=sin(t);
```

$$eq3 := \frac{d^3}{dt^3}x(t) - 6\,\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 12\,\frac{d}{dt}x(t) - 8\,x(t) = \sin(t)$$

```
> dsolve(eq3);
```

$$x(t) = -\frac{11}{125}\cos(t) - \frac{2}{125}\sin(t) + _C1\, e^{2\,t} + _C2\, e^{2\,t}t + _C3\, e^{2\,t}t^2$$

```
> dsolve({eq3,x(0)=0,D(x)(0)=2,(D@@2)(x)(0)=4});
```

$$x(t) = -\frac{11}{125}\cos(t) - \frac{2}{125}\sin(t) + \frac{11}{125}e^{2\,t} + \frac{46}{25}e^{2\,t}t - \frac{19}{10}e^{2\,t}t^2$$

```
> sol3:=-11/125*cos(t)-2/125*sin(t)+11/125*exp(2*t)+
        46/25*exp(2*t)*t-19/10*exp(2*t)*t^2:
> plot(sol3,t=-4..1);
```

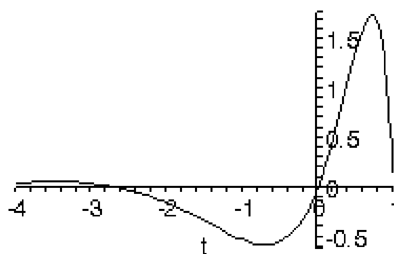


Figura 10

În cele ce urmează, vom mai prezenta o altă funcţie de plotare *DEtools [DEplot]* (plot solutions to an equation or a system of DEs) pentru a vizualiza soluţia acestei probleme cu date iniţiale. Utilizarea acesteia nu necesită rezolvarea ecuaţiei în avans deoarece ecuaţia este inclusă direct în instrucţiune. Sintaxa acestei funcţii poate avea una din următoarele forme:

with(DEtools):DEplot(deqns, vars, trange, options);

with(DEtools):DEplot(deqns, vars, trange, inits, options);

with(DEtools):DEplot(deqns, vars, trange, xrange, yrange, options);

with(DEtools):DEplot(deqns, vars, trange, inits, xrange, yrange, options);

în care:

deqns	- ecuaţia diferenţială de orice ordin pe care dorim să o rezolvăm sau lista de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi (în cazul sistemelor)
vars	- variabila independentă sau lista variabilelor independente
trange	- domeniul de definiţie al variabilei independente
inits	- lista de condiţii iniţiale
xrange	- domeniul de variaţie al primei variabile dependente
yrange	- domeniul de variaţie al celei de-a doua variabile dependente
options	- diferite opţiuni: modul de afişare al soluţiei, metoda de rezolvare, etc.

```
> with(DEtools):DEplot(eq3,x(t),t=-4..1,[[x(0)=0,D(x)(0)=2,
  (D@@2)(x)(0)=4]],x=-0.6..1.8,stepsize=.05,title=‘Solutia
  Problemei Cauchy‘);
```

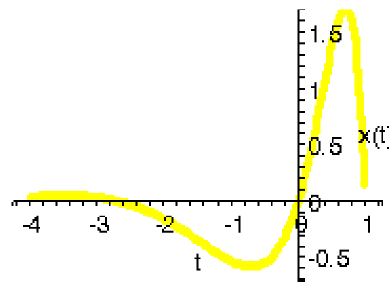


Figura 11

4. Ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al treilea cu coeficienţi variabili de tip Euler:

$$t^2\dddot{x} + 5t\ddot{x} + 4\dot{x} = \ln t, \qquad t > 0 \tag{2.33}$$

```
> eq4:=t^2*diff(x(t),t,t,t)+5*t*diff(x(t),t,t)+
        4*diff(x(t),t)=ln(t);
```

$$eq4 := t^2 \frac{d^3}{dt^3}x(t) + 5\,t\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 4\,\frac{d}{dt}x(t) = \ln(t)$$

```
> dsolve({eq4,x(2)=2,D(x)(2)=1/2,(D@@2)(x)(2)=3});
```

$$x(t) = -2\ln(2) + 19 + \frac{(-29+2\ln(2))\cdot\ln(t)}{t} + \frac{32\ln(2)-2(\ln(2))^2-32}{t} + 1/4t(\ln(t)) - 2$$

```
> sol4:=-2*ln(2)+19+(-29+2*ln(2))*ln(t)/t+(32*ln(2)-
      2*ln(2)^2-32)/t+1/4*t*(ln(t)-2):
> plot(sol4,t=0.1..infinity,axes=boxed);
```

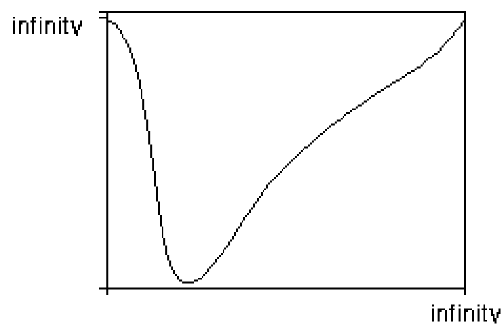


Figura 12

Capitolul 3

Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare cu coeficienţi constanţi

3.1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare cu coeficienţi constanţi omogene

Definiţia 3.1.1 *Un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare cu coeficienţi constanţi omogen este un sistem de n relaţii de dependenţă funcţională de forma:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

dintre un sistem de n funcţii necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi derivatele acestora $\dot{x_1}, \dot{x_2}, \ldots, \dot{x_n}$. În sistemul (3.1) coeficienţii a_{ij} sunt constante considerate cunoscute.

Definiţia 3.1.2 *Un sistem ordonat de n funcţii reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de clasă*

C^1 este soluţie a sistemului (3.1) dacă verifică

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i(t)$$

pentru orice $t \in I\!R^1$.

Definiţia 3.1.3 *Fiind date $t_0 \in I\!R'$ şi $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in I\!R^n$ problema determinării soluţiei $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ a sistemului (3.1) care verifică $x_i(t_0) = x_i^0$ $i = \overline{1,n}$ se numeşte problemă cu date iniţiale sau problemă Cauchy.*

Pentru reprezentarea matriceală a sistemului (3.1) notăm cu A matricea pătratică care are ca elemente constantele a_{ij}: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ şi cu X matricea coloană $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T$. Cu aceste matrice sistemul (3.1) se scrie sub forma matriceală:

$$\dot{X} = A \cdot X. \tag{3.2}$$

În această problemă derivarea funcţiei matriceale $X = X(t)$ înseamnă derivarea elementelor matricei, iar produsul $A \cdot X$ însemnă produsul dintre matricea A şi matricea X.
Problema Cauchy (problema cu date iniţiale) se scrie matriceal sub forma:

$$\dot{X} = A \cdot X, \quad X(t_0) = X^0 \tag{3.3}$$

şi constă în determinarea funcţiei matriceale $X = X(t)$ care verifică ecuaţia (3.2) şi condiţia iniţială $X(t_0) = X^0$.

Teorema 3.1.1 *(de existenţă a soluţiei problemei Cauchy)*
Pentru orice $t_0 \in I\!R^1$ şi $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)^T$ problema Cauchy (3.3) are o soluţie definită pe $I\!R^1$.

Demonstraţie: Considerăm şirul de funcţii matriceale definite astfel:

$$\begin{aligned}
X^0(t) &= X^0 = I \cdot X^0 \\
X^1(t) &= X^0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot X^0(\tau)d\tau = [I + \frac{(t-t_0)\cdot A}{1!}] \cdot X^0 \\
X^2(t) &= X^0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot X^1(\tau)d\tau = [I + \frac{(t-t_0)\cdot A}{1!} + \frac{(t-t_0)^2\cdot A^2}{2!}] \cdot X^0 \\
X^3(t) &= X^0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot X^2(\tau)d\tau = \\
&= [I + \frac{(t-t_0)\cdot A}{1!} + \frac{(t-t_0)^2\cdot A^2}{2!} + \frac{(t-t_0)^3\cdot A^3}{3!}] \cdot X^0 \\
\ldots \\
X^m(t) &= X^0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot X^{m-1}(\tau)d\tau = \\
&= [I + \frac{(t-t_0)\cdot A}{1!} + \frac{(t-t_0)^2\cdot A^2}{2!} + \ldots + \frac{(t-t_0)^m\cdot A^m}{m!}] \cdot X^0 \\
\ldots
\end{aligned}$$

Funcţiile din acest şir verifică inegalitatea

$$\|X^{m+p}(t) - X^m(t)\| \leq \sum_{k=m+1}^{m+p} \frac{|t-t_0|^k \cdot \|A\|^k}{k!} \cdot \|X^0\|, (\forall)\ m, p \in I\!N,\ (\forall)\ t \in I\!R^1$$

şi prin urmare şirul de funcţii $\{X^m(t)\}_{m\in n}$ este uniform fundamental pe orice compact $K \subset I\!R^1$. Rezultă că şirul este uniform convergent pe orice compact $K \subset I\!R^1$ şi se poate trece la limită în egalitatea

$$X^m(t) = X^0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot X^{m-1}(\tau)d\tau.$$

pentru $m \to \infty$.

Trecând la limită obţinem că limita $X(t)$ a şirului $X^m(t)$

$$X(t) = \lim_{m\to\infty} X^m(t)$$

verifică egalitatea

$$X(t) = X^0 + \int_{t_0}^{t} A \cdot X(\tau)d\tau$$

sau

$$X(t) = X^0 + A \cdot \int_{t_0}^{t} X(\tau)d\tau.$$

De aici rezultă că funcţia $X(t)$ este de clasă C^1 şi derivata ei verifică $\dot{X}(t) = A \cdot X(t)$, adică $X(t)$ este soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale sub formă matriceală (3.2). Punând $t = t_0$ în egalitatea

$$X(t) = X^0 + A \cdot \int_{t_0}^{t} X(\tau)d\tau$$

obţinem egalitatea $X(t_0) = X^0$ care arată că $X(t)$ este soluţia problemei Cauchy (3.3). Am arătat în acest fel că problema Cauchy (3.3) are o soluţie.

Observaţia 3.1.1 În această demonstraţie norma matricei pătratice A $\|A\|$ este dată de $\|A\| = \sup\limits_{\|X\| \leq 1} \| A \cdot X \|$.

Observaţia 3.1.2 Şirul de matrice pătratice care intervine în această demonstraţie:

$$U^m(t;t_0) = I + \frac{(t-t_0) \cdot A}{1!} + \frac{(t-t_0)^2 \cdot A^2}{2!} + \ldots + \frac{(t-t_0)^m \cdot A^m}{m!}$$

este de asemenea fundamental.
Într-adevăr:

$$\| U^{m+p}(t;t_0) - U^m(t;t_0) \| \leq \sum_{k=m+1}^{m+p} \frac{| t - t_0 |^k \cdot \| A \|^k}{k!}, \ (\forall)m, p \in I\!N, \ t \in I\!R^1$$

şi prin urmare şirul de funcţii matriceale $\{U^m(t;t_0)\}_{m \in I\!N}$ este uniform convergent pe orice compact $K \subset I\!R^1$. Limita acestui şir este suma seriei de matrice

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^m \cdot A^m}{m!}$$

care se notează cu $e^{(t-t_0)\cdot A}$:

$$e^{(t-t_0)\cdot A} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^m \cdot A^m}{m!}$$

Observaţia 3.1.3 Funcţia matriceală $e^{(t-t_0)\cdot A}$ se numeşte matricea rezolvantă a sistemului (3.2). O soluţie a problemei Cauchy (3.3) se obţine înmulţind matricea $e^{(t-t_0)\cdot A}$ cu matricea X^0:

$$X(t;t_0,X^0) = e^{(t-t_0)\cdot A}\cdot X^0.$$

Această soluţie este definită pe $I\!R^1$.

Teorema 3.1.2 *(de unicitate a soluţiei problemei Cauchy)*
Problema Cauchy (3.3) are o singură soluţie.

Demonstraţie: Presupunem prin absurd că problema Cauchy (3.3), pe lângă soluţia $X(t;t_0,X^0)$ determinată în teorema precedentă mai are o soluţie $\widetilde{X}(t)$. Pe intervalul I de definiţie a acestei soluţii ($I \ni t_0$) scriem egalităţile :

$$X(t;t_0,X^0) = X^0 + A\cdot\int_{t_0}^{t} X(\tau;t_0,X^0)d\tau, \quad (\forall)t\in I$$

şi

$$\widetilde{X}(t) = X^0 + A\cdot\int_{t_0}^{t}\widetilde{X}(\tau)d\tau, \quad (\forall)t\in I$$

şi deducem succesiv:

$$\begin{aligned} X(t;t_0,X^0)-\widetilde{X}(t) &= A\cdot\int_{t_0}^{t}[X(\tau;t_0,X^0)-\widetilde{X}(\tau)]d\tau \\ \|X(t;t_0,X^0)-\widetilde{X}(t)\| &\le \|A\|\cdot\left|\int_{t_0}^{t}\|X(\tau;t_0,X^0)-\widetilde{X}(\tau)\|d\tau\right| < \\ &< \varepsilon + \|A\|\cdot\left|\int_{t_0}^{t}\|X(\tau;t_0,X^0)-\widetilde{X}(\tau)\|d\tau\right| \\ &\quad (\forall)\varepsilon>0\ (\forall)t\in I. \end{aligned}$$

Pentru $t > t_0$ rezultă în continuare:

$$\frac{\|X(t;t_0,X^0)-\widetilde{X}(t)\|}{\varepsilon+\displaystyle\int_{t_0}^{t}\|A\|\cdot\|X(\tau;t_0,X^0)-\widetilde{X}(\tau)\|d\tau} \le 1 \ \Leftrightarrow$$

$$\frac{\|A\|\cdot\|X(t;t_0,X^0)-\widetilde{X}(t)\|}{\varepsilon+\displaystyle\int_{t_0}^{t}\|A\|\cdot\|X(\tau;t_0,X^0)-\widetilde{X}(\tau)\|d\tau}\le\|A\|\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\varepsilon+\displaystyle\int_{t_0}^{t}\|A\|\cdot\|X(\tau;t_0,X^0)-\widetilde{X}(\tau)\parallel d\tau\right)}{\varepsilon+\displaystyle\int_{t_0}^{t}\|A\|\cdot\|X(\tau;t_0,X^0)-\widetilde{X}(\tau)\|d\tau}\le\|A\|\ \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\varepsilon+\int_{t_0}^{t}\|A\|\cdot\|X(\tau;t_0,X^0)-\widetilde{X}(\tau)\parallel d\tau\right)-ln(\varepsilon)\le\parallel A\parallel(t-t_0)\ \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{\varepsilon+\displaystyle\int_{t_0}^{t}\|A\|\cdot\|X(\tau;t_0,X^0)-\widetilde{X}(\tau)\parallel d\tau}{\varepsilon})\le\parallel A\parallel\cdot(t-t_0)\ \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon+\int_{t_0}^{t}\|A\|\cdot\|X(\tau;t_0,X^0)-\widetilde{X}(\tau)\parallel d\tau\le\varepsilon\cdot e^{\|A\|\cdot(t-t_0)},\ (\forall)t\ge t_0,\ \varepsilon>0.$$

$$\Longrightarrow\|X(t;t_0,X^0)-\widetilde{X}(t)\|<\varepsilon e^{\|A\|(t-t_0)},\ (\forall)t\ge t_0,\ (\forall)\varepsilon>0$$

Pentru t fixat şi $\varepsilon\to 0$ rezultă

$$\|X(t;t_0,X^0)-\widetilde{X}(t)\|=0.$$

Astfel am arătat că pentru orice $t\ge t_0$ şi $t\in I$ avem $\widetilde{X}(t)=X(t;t_0,X^0)$. Raţionăm analog pentru $t\le t_0$, $t\in I$ şi obţinem $\widetilde{X}(t)=X(t;t_0,X^0)$. Se obţine în final egalitatea

$$\widetilde{X}(t)=X(t;t_0,X^0)$$

pentru orice $t\in I$, care arată că soluţia $\widetilde{X}(t)$ coincide cu soluţia $X(t;t_0,X^0)$ găsită în teorema de existenţă.

Observaţia 3.1.4 Din teorema de existenţă şi cea de unicitate rezultă că orice soluţie a sistemului (3.2) este definită pe $I\!R^1$ şi se obţine cu formula $X(t)=e^{(t-t_0)\cdot A}\cdot X^0$.
Într-adevăr fie X(t) o soluţie oarecare a sistemului (3.2) definită pe un interval

I. Considerăm $t_0 \in I$ şi $X(t_0) = X^0$. Soluţia considerată $X(t)$, conform teoremei de unicitate, coincide cu funcţia $X(t; t_0, X^0) = e^{(t-t_0)\cdot A} \cdot X^0$ soluţie a problemei Cauchy (3.3):

$$X(t) \equiv X(t; t_0, X^0) \equiv e^{(t-t_0)\cdot A} \cdot X^0.$$

Teorema 3.1.3 *Mulţimea S a soluţiilor sistemului diferenţial liniar cu coeficienţi constanţi de ordinul întâi este un spaţiu vectorial n-dimensional.*

Demonstraţie: Fie $X^1(t)$ şi $X^2(t)$ două soluţii ale sistemului(3.2) şi α, β două constante reale. Ţinând seama de egalitatea:

$$\alpha \cdot X^1(t) + \beta \cdot X^2(t) = e^{(t-t_0)\cdot A} \cdot [\alpha \cdot X^1(t_0) + \beta \cdot X^2(t_0)]$$

rezultă că funcţia $\alpha \cdot X^1(t) + \beta \cdot X^2(t)$ este soluţie a sistemului (3.2). Obţinem în acest fel că mulţimea S a soluţiilor sistemului (3.2) este spaţiu vectorial. Pentru a demonstra că dimensiunea spaţiului vectorial S este n, considerăm baza canonică $b^1, b^2, \ldots, b^n$ în $\mathbb{R}^n$:

$$b^1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T,\ b^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T,\ \ldots,\ b^n = (0, 0, 0, \ldots, 1)^T$$

şi sistemul de soluţii

$$X^i(t) = e^{t\cdot A} \cdot b^i,\ i = \overline{1, n}.$$

Vom arăta că sistemul de soluţii $X^1(t), X^2(t), \ldots, X^n(t)$ este o bază în spaţiul soluţiilor S. Pentru aceasta, fie la început $c_1, c_2, \ldots, c_n$, n constante reale astfel ca

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e^{t\cdot A} \cdot b^k = 0$$

$(\forall)t \in \mathbb{R}^1$. În particular pentru $t = 0$ avem

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot b^k = 0$$

de unde rezultă $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Rezultă astfel că sistemul de funcţii $X^i(t) = e^{t\cdot A} \cdot b^i,\ i = \overline{1, n}$ este liniar independent.
Considerăm acum o soluţie oarecare $X(t)$ a sistemului (3.2), şi vectorul $X(0)$. Pentru acest vector $X(0) \in \mathbb{R}^n$ există n constante reale $c_1, c_2, \ldots, c_n$ astfel ca

$$X(0) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot b^k.$$

Construim funcţia

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot X^k(t)$$

şi remarcăm că aceasta este o soluţie a sistemului (3.2) şi verifică:

$$\widetilde{X}(0) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot X^k(0) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot b^k = X(0).$$

În baza teoremei de unicitate rezultă că:

$$\widetilde{X}(t) = X(t),\ (\forall)t.$$

Am obţinut astfel că, o soluţie oarecare $X(t)$ este combinaţia liniară

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot X^k(t)$$

a soluţiilor $X^k(t)$.

Definiţia 3.1.4 *Un sistem de n soluţii* $\{X^k(t)_{k=\overline{1,n}}\}$ *ale ecuaţiei (3.2) se numeşte sistem fundamental dacă sistemul de funcţii* $\{X^k(t)_{k=\overline{1,n}}\}$ *este liniar independent.*

Teorema 3.1.4 *Un sistem de n soluţii* $\{X^k(t)_{k=\overline{1,n}}\}$ *ale ecuaţiei (3.2) este sistem fundamental dacă şi numai dacă funcţia reală definită prin:*

$$W(X^1(t), \ldots, X^n(t)) = det(x_j^i(t)),$$

numită wronskianul sistemului, nu se anulează. Am notat:

$$X^i(t) = (x_1^i(t), x_2^i(t), \ldots, x_n^i(t))^T.$$

Demonstraţie: Arătăm la început necesitatea condiţiei. Raţionăm prin reducere la absurd şi admitem că, deşi sistemul de soluţii $X^1(t), X^2(t), \ldots, X^n(t)$ este fundamental există un punct $t_0 \in I\!R^1$ în care wronskianul sistemului de soluţii se anulează: $det(x_j^i(t_0)) = 0$. În aceste condiţii, sistemul algebric liniar şi omogen de n ecuaţii cu n necunoscute $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_j^i(t_0) = 0 \ \ j = \overline{1,n}$$

are o soluţie nebanală $c_i = c_i^0,\ i = \overline{1,n}$. Cu o asemenea soluţie nebanală $c_i = c_i^0,\ i = \overline{1,n}$ (c_i^0 nu sunt toate nule) construim funcţia:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^0 \cdot X^i(t) \ \ t \in I\!R^1.$$

Funcţia $X(t)$ construită astfel este soluţie a sistemului (3.2) şi se anulează în t_0:

$$X(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i^0 \cdot X^i(t_0) = 0.$$

În virtutea teoremei de unicitate rezultă că funcţia $X(t)$ este identic nulă:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^0 \cdot X^i(t) = 0, \ \ (\forall) t \in I\!R^1.$$

Această însă este absurd, deoarece sistemul de n soluţii $\{X^i(t)_{i=\overline{1,n}}\}$ este independent.
Trecem acum să arătăm suficienţa condiţiei. Presupunem că wronskianul $W(X^1(t), \ldots, X^n(t)) = det(x_j^i(t))$ nu se anulează şi arătăm că sistemul de soluţii $\{X^i(t)_{i=\overline{1,n}}\}$ este fundamental.
Raţionăm prin reducere la absurd şi presupunem că sistemul de soluţii $\{X^i(t)_{i=\overline{1,n}}\}$ nu este fundamental (nu este liniar independent). În această ipoteză există un sistem de constante $\{c_i^0\},\ i = \overline{1,n}$, nu toate nule astfel că

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^0 \cdot X^i(t) = 0$$

pentru orice $t \in I\!R^1$. Egalitatea aceasta implică egalităţile

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^0 \cdot x_j^i(t) = 0 \ (\forall) t \in I\!R^1 \ j = \overline{1,n}$$

ceea ce arată că $det(x_j^i(t)) = 0 \ (\forall) t \in I\!R^1$; absurd.

Teorema 3.1.5 *(Liouville). Un sistem de n soluţii $\{X^i(t)_{i=\overline{1,n}}\}$ ale sistemului (3.2) este fundamental dacă şi numai dacă există un punct $t_0 \in I\!R^1$ în care wronskianul sistemului de soluţii*

$$W(X^1(t), \ldots, X^n(t)) = det(x_j^i(t))$$

este nenul.

Demonstraţie: Având în vedere teorema precedentă este suficient să arătăm că dacă există $t_0 \in I\!R^1$ astfel ca

$$W(X^1(t_0), \ldots, X^n(t_0)) \neq 0$$

atunci pentru orice $t \in I\!R^1$, $W(X^1(t), \ldots, X^n(t)) \neq 0$. Calculăm derivata wronskianului sistemului de soluţii $\{X^i(t)_{i=\overline{1,n}}\}$ şi obţinem

$$\frac{d}{dt}W(X^1(t), \ldots, X^n(t)) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) \cdot W(X^1(t), \ldots, X^n(t)$$

De aici rezultă egalitatea:

$$W(X^1(t), \ldots, X^n(t)) = W(X^1(t_0), \ldots, X^n(t_0)) \cdot \exp\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) \cdot (t - t_0)\right]$$

care arată că pentru orice $t \in I\!R^1$ avem $W(X^1(t), \ldots, X^n(t)) \neq 0$.

Observaţia 3.1.5 În demonstraţia teoremei care afirma că soluţiile sistemului (3.2) formează un spaţiu vectorial n dimensional am văzut că dacă

$$b^1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T,\ b^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T,\ \ldots,\ b^n = (0, 0, 0, \ldots, 1)^T$$

atunci sistemul de funcţii

$$X^1(t) = e^{t \cdot A} \cdot b^1,\ \ X^2(t) = e^{t \cdot A} \cdot b^2,\ \ \ldots,\ \ X^n(t) = e^{t \cdot A} \cdot b^n$$

este un sistem fundamental de soluţii. Dacă ţinem seama de faptul că soluţia $X^i(t)$ este coloana i a matricei pătratice $e^{t \cdot A}$ atunci deducem că putem construi soluţiile ecuaţiei (3.2) dacă cunoaştem elementele matricei $e^{t \cdot A}$.

Pentru determinarea elementelor matricei $e^{t \cdot A}$ ţinem seama de următoarele rezultate de algebră liniară:

Propoziţia 3.1.1 *Dacă matricea A este similară cu matricea A_0 adică*

$$A = S \cdot A_0 \cdot S^{-1}$$

atunci matricea $e^{t \cdot A}$ este similară cu matricea $e^{t \cdot A_0}$ adică

$$e^{t \cdot A} = S \cdot e^{t \cdot A_0} \cdot S^{-1}.$$

Aceasta întrucât pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem $A^k = S \cdot A_0^k \cdot S^{-1}$.

Propoziţia 3.1.2 *(teorema lui Jordan)*
Pentru orice matrice A există o matrice "diagonală"

$$A_0 = diag(A_{01}, A_{02}, \dots A_{0m})$$

şi o matrice nesingulară S cu următoarele proprietăţi:

i) A_{0j} *este matrice pătrată de ordin* q_j, $j = \overline{1,m}$ *şi* $\sum_{j=1}^{m} q_j = n$;

ii) A_{0j} *este matrice de forma* $A_{0j} = \lambda_j \cdot I_j + N_j$, $j = \overline{1,m}$, *unde* λ_j *este valoare proprie pentru matricea* A, I_j *este matricea unitate de ordin* q_j, N_j *este matricea nilpotentă :* $N_j = \left(b_{kl}^j\right), k, l = \overline{1, q_j}$ *cu* $b_{k,k+1}^j = 1$ *şi* $b_{kl}^j = 0$, *pentru* $l \neq k+1$, *şi* q_j *este cel mult egal cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii* λ_j;

iii) $A = S \cdot A_0 \cdot S^{-1}$.

Propoziţia 3.1.3 *Matricea* $e^{t \cdot A_0}$ *are forma:*

$$e^{t \cdot A_0} = diag\left(e^{t \cdot A_{01}}, e^{t \cdot A_{02}}, \dots, e^{t \cdot A_{0m}}\right)$$

şi matricea $e^{t \cdot A_0}$ *are forma:*

$$e^{t \cdot A_{0j}} = e^{\lambda_j \cdot t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{q_j-1}}{(q_j-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{q_j-2}}{(q_j-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.1.6 *Elementele matricei* $e^{t \cdot A} = S \cdot e^{t \cdot A_0} \cdot S^{-1}$ *sunt funcţii de forma:*

$$u_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{p} e^{\lambda_k t} P_{q_k-1}^{ij}(t) + \sum_{k=1}^{l} e^{\mu_k t}\left[Q_{r_k-1}^{ij}(t)\cos \nu_k t + R_{r_k-1}^{ij}(t) \sin \nu_k t\right],$$
$$i, j = \overline{1,n}$$

unde $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ *sunt valorile proprii reale ale lui* A *cu ordinele de multiplicitate respectiv* $q_1, \dots, q_p$, $\mu_k + i\nu_k$, $k = \overline{1,l}$ *sunt valorile proprii complexe ale lui* A *cu ordin de multiplicitate* r_k, *iar* P_{q_k-1}, Q_{r_k-1} *şi* R_{r_k-1} *sunt polinoame de grad* $q_k - 1$ *şi* $r_k - 1$ *respectiv, cu coeficienţi reali.*

Rezultatul este imediat în baza propoziţiilor (3.1.1, 3.1.2, 3.1.3).

Teorema 3.1.7 *Soluţiile sistemului (3.2) sunt funcţii de forma:*

$$e^{\lambda_k t} P_{q_k - 1}(t) + \sum_{k=1}^{l} e^{\mu_k t} \left[Q_{r_k - 1}(t) \cos \nu_k t + R_{r_k - 1}(t) \sin \nu_k t \right], i, j = \overline{1, n}$$

unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sunt valorile proprii reale ale lui A cu ordin de multiplicitate respectiv $q_1, \ldots, q_p$; $\mu_k + i\nu_k$, $k = \overline{1, l}$ sunt valorile proprii complexe ale lui A cu ordin de multiplicitate r_k; P_{q_k-1}, Q_{r_k-1} şi R_{r_k-1} sunt vectori coloană ai căror elemente sunt polinoame de grad $q_k - 1$ respectiv $r_k - 1$.

Exerciţii

1. Rezolvaţi următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 8x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 + x_2 \end{cases}$ **R:** $\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot e^{-3t} \\ x_2(t) = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot e^{3t} - \frac{1}{4} \cdot c_2 \cdot e^{-3t} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{x_1} = -3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x_2} = -2x_1 + x_2 \end{cases}$ **R:** $\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-t} \\ x_2(t) = c_1 \cdot e^{-t} + \frac{2t+1}{2} \cdot c_2 \cdot e^{-t} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dot{x_1} = 2x_1 - x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 + 2x_2 \end{cases}$ **R:** $\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cdot \cos t \cdot e^{2t} + c_2 \cdot \sin t \cdot e^{2t} \\ x_2(t) = c_1 \cdot \sin t \cdot e^{2t} - c_2 \cdot \cos t \cdot e^{2t} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dot{x_1} = 3x_1 + 12x_2 - 4x_3 \\ \dot{x_2} = -x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \dot{x_3} = -x_1 - 12x_2 + 6x_3 \end{cases}$ **R:** $\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{t} + c_3 \cdot e^{3t} \\ x_2(t) = -\frac{3}{8} c_1 \cdot e^{2t} - \frac{1}{2} c_2 \cdot e^{t} - \frac{1}{3} c_3 \cdot e^{3t} \\ x_3(t) = -\frac{7}{8} c_1 \cdot e^{2t} - c_2 \cdot e^{t} - c_3 \cdot e^{3t} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \dot{x_2} = 4x_1 + x_2 \\ \dot{x_3} = 2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$ **R:** $\begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{2} c_1 \cdot e^{-t} + \qquad + \frac{1}{4} c_3 \cdot e^{t} \\ x_2(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{t} + c_3 \cdot t \cdot e^{t} \\ x_3(t) = \qquad + \frac{1}{2} c_2 \cdot e^{t} + \frac{1}{2} c_3 \cdot t \cdot e^{t} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dot{x_1} = 2x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x_2} = 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \dot{x_3} = -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$ **R:** $\begin{cases} x_1(t) = c_2 + c_3 \cdot e^{t} \\ x_2(t) = c_1 \cdot e^{t} + 3 c_2 \\ x_3(t) = -c_1 \cdot e^{t} - c_2 + c_3 \cdot e^{t} \end{cases}$

$g)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = \qquad -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = \qquad\qquad -x_3 \end{cases}$ **R:** $\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cdot e^{-t} - c_2 \cdot t \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} c_3 \cdot t^2 \cdot e^{-t} \\ x_2(t) = \qquad + c_2 \cdot e^{-t} \quad - \ c_3 \cdot t \cdot e^{-t} \\ x_3(t) = \qquad\qquad c_3 \cdot e^{-t} \end{cases}$

2. Rezolvaţi următoarele probleme Cauchy (cu date iniţiale):

$a)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$ $\quad x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0$ **R:** $\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t \\ x_2(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t \end{cases}$

$b)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = 11x_1 + 16x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 \end{cases}$ $\quad x_1(1) = 0,\ x_2(1) = 1$ **R:** $\begin{cases} x_1(t) = 4e^{3t-3} + 4e^{7t-7} \\ x_2(t) = 2e^{3t-3} - e^{7t-7} \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_2 \end{cases}$ $\quad x_1(1) = 1,\ x_2(1) = 1$ **R:** $\begin{cases} x_1(t) = \frac{3}{5} e^{2t-2} + \frac{2}{5} e^{-3t+3} \\ x_2(t) = -\frac{3}{5} e^{2t-2} + \frac{8}{5} e^{-3t+3} \end{cases}$

3. Se consideră sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = c \cdot x_1 + d \cdot x_2 \end{cases}$$

cu $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$. Arătaţi că:

i) dacă $(a-d)^2 + 4 \cdot b \cdot c \geq 0$ şi $a + d < 0$ şi $a \cdot d - b \cdot c > 0$, atunci orice soluţie nenulă a sistemului tinde la $(0, 0)$.

ii) dacă $(a-d)^2 + 4 \cdot b \cdot c \geq 0$ si $a + d > 0$ şi $a \cdot d - b \cdot c > 0$, atunci orice soluţie nenulă a sistemului tinde în normă la $+\infty$.

iii) dacă $(a-d)^2 + 4 \cdot b \cdot c < 0$ si $a + d < 0$, atunci toate soluţiile nenule ale sistemului tind la $(0, 0)$.

iv) dacă $(a-d)^2 + 4 \cdot b \cdot c < 0$ si $a + d > 0$, atunci toate soluţiile nenule ale sistemului tind în normă la $+\infty$.

v) dacă $(a-d)^2 + 4 \cdot b \cdot c < 0$ si $a + d = 0$, atunci toate soluţiile nenule ale sistemului sunt periodice.

3.2 Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare cu coeficienţi constanţi neomogene

Definiţia 3.2.1 *Un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare cu coeficienţi constanţi neomogen este un sistem de n relaţii de dependenţă funcţională de forma:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \quad + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \quad + f_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n \quad + f_n(t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

dintre un sistem de n funcţii necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi derivatele acestora $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n$.
În sistemul (3.4) coeficienţii a_{ij} sunt constante cunoscute, iar funcţiile reale $f_i : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$ sunt continue şi cunoscute.

Definiţia 3.2.2 *Un sistem ordonat de n funcţii reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de clasă C^1 este soluţie a sistemului (3.4) dacă verifică:*

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + f_i(t) \ (\forall) t \in \mathbb{R}$$

Definiţia 3.2.3 *Fiind dată $t_0 \in \mathbb{R}^1$ şi $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, problema determinării soluţiei $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ a sistemului (3.4) care verifică $x_i(t_0) = x_i^0$ $i = \overline{1,n}$, se numeşte problemă cu date iniţiale sau problemă Cauchy.*

Pentru reprezentarea matriceală a sistemului (3.4) notăm cu A matricea pătrată $n \times n$ care are ca elemente constantele a_{ij}: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, cu $F(t)$ matricea coloană $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$ şi cu $X(t)$ matricea coloană $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Cu aceste matrice sistemul (3.4) se scrie sub forma matriceală:

$$\dot{X} = A \cdot X + F(t) \tag{3.5}$$

iar problema Cauchy se scrie sub forma

$$\dot{X} = A \cdot X + F(t), \qquad X(t_0) = X^0 \tag{3.6}$$

Teorema 3.2.1 *(de existenţă şi unicitate şi de reprezentare a soluţiei problemei cu date iniţiale).*
Dacă funcţia $F(t)$ este continuă pe $I\!R^1$, atunci pentru orice $t_0 \in I\!R^1$ şi $X^0 \in I\!R^n$ problema cu date iniţiale (3.6) are soluţie unică definită pe $I\!R^1$ şi această soluţie se reprezintă sub forma:

$$X(t;t_0,X^0) = e^{(t-t_0)\cdot A} \cdot X^0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\cdot A} \cdot F(s)ds \tag{3.7}$$

Demonstraţie: Pentru a demonstra că problema Cauchy (3.6) are cel mult o soluţie, presupunem prin absurd că $X^1(t)$ şi $X^2(t)$ sunt două soluţii ale problemei (3.6) şi considerăm funcţia $X^3(t) = X^1(t) - X^2(t)$.
Se verifică uşor că funcţia $X^3(t)$ este soluţia problemei Cauchy

$$\dot{X}^3 = A \cdot X^3, \quad X^3(t_0) = 0.$$

Din teorema de unicitate a soluţiei problemei Cauchy pentru sisteme omogene rezultă că:

$$X^3(t) = 0, \ (\forall)t.$$

Prin urmare

$$X^1(t) - X^2(t) \equiv 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza $X^1(t) \neq X^2(t)$.
Rămâne să arătăm că funcţia $Z(t)$ definită prin:

$$Z(t) = e^{(t-t_0)\cdot A} \cdot X^0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\cdot A} \cdot F(s)ds$$

pentru orice $t \in I\!R^1$ verifică (3.6).
Remarcăm că funcţia $Z(t)$ este corect definită; este de clasă C^1 pe $I\!R^1$ şi derivata ei verifică:

$$\dot{Z}(t) = A \cdot e^{(t-t_0)\cdot A} \cdot X^0 + F(t) + \int_{t_0}^{t} A \cdot e^{(t-s)\cdot A} \cdot F(s)ds = A \cdot Z + F(t).$$

Prin urmare funcţia $Z(t)$ este soluţie a ecuaţiei neomogene (3.5). În plus calculând $Z(t_0)$ găsim $Z(t_0) = X^0$ şi astfel teorema a fost complet demonstrată.

Problema 3.2.1 O substanţă A se descompune în alte două substanţe B şi C. Viteza de formare a fiecăreia din ele este proporţională cu cantitatea de substantă nedescompusă. Să se determine variaţia cantităţilor x şi y, ce se formează în funcţie de timp.
Se dau cantitatea iniţială de substanţă a şi cantităţile de substanţe B şi C formate după trecerea unei ore: $\frac{a}{8}$ şi $\frac{3a}{8}$.

Rezolvare: La momentul t cantitatea de substanţă A este $a-x-y$. Deci vitezele de formare ale substanţelor B şi C vor fi:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1 \cdot (a-x-y) \\ \dot{y} = k_2 \cdot (a-x-y) \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \dot{x} = -k_1 \cdot x - k_1 \cdot y + k_1 \cdot a \\ \dot{x} = -k_2 \cdot x - k_2 \cdot y + k_2 \cdot a \end{cases}$$

Matricea A în acest caz este $A = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_1 \\ -k_2 & -k_2 \end{bmatrix}$.
Valorile proprii ale matricei A sunt rădăcinile ecuaţiei

$$(k_1+\lambda)\cdot(k_2+\lambda) - k_1 \cdot k_2 = 0.$$

Aceste rădăcini sunt $\lambda_1 = -(k_1+k_2)$ şi $\lambda_2 = 0$, iar matricea $e^{t\cdot A}$ este:

$$e^{t\cdot A} = \frac{1}{k_1+k_2}\begin{bmatrix} -k_1 \cdot e^{-(k_1+k_2)\cdot t} + k_2 & e^{-(k_1+k_2)\cdot t} - 1 \\ k_1 \cdot k_2 \cdot e^{-(k_1+k_2)\cdot t} - k_1 \cdot k_2 & k_1 + k_2 \cdot e^{-(k_1+k_2)\cdot t} \end{bmatrix}$$

De aici în virtutea formulei (3.7) rezultă:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{(t-1)\cdot A} \cdot \begin{pmatrix} a/8 \\ 3/8 \end{pmatrix} + \int_1^t e^{(t-s)\cdot A} \begin{pmatrix} k_1 \cdot a \\ k_2 \cdot a \end{pmatrix} ds$$

Exerciţii

1. Rezolvaţi următoarele sisteme de ecuaţii neomogene:

a) $\begin{cases} \dot{x_1} = \quad x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 \quad + e^t + e^{-t} \end{cases}$

$$\textbf{R:}\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{t} + (\frac{1}{2}t - \frac{1}{4})e^{t} - (\frac{1}{2}t + \frac{1}{4})e^{-t} \\ \\ x_2(t) = -c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{t} + (\frac{1}{2}t + \frac{1}{4})e^{t} + (\frac{1}{2}t - \frac{1}{4})e^{-t} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \dot{x_1} = 11x_1 + 16x_2 + t \\ \dot{x_2} = -2x_1 - x_2 + 1 - t \end{cases}$

$$\textbf{R:}\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot e^{7t} + \frac{23}{49} - \frac{5}{7}t \\ \\ x_2(t) = -\frac{1}{2}\, c_1 \cdot e^{3t} - \frac{1}{4}\, c_2 \cdot e^{7t} - \frac{18}{49} + \frac{3}{7}t \end{cases}$$

c) $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 - x_2 + 3t^2 \\ \dot{x_2} = -4x_1 - 2x_2 + 2 + 8t \end{cases}$

$$\textbf{R:}\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{-3t} - t^2 \\ \\ x_2(t) = -c_1 \cdot e^{2t} + 4c_2 \cdot e^{-3t} + 2t + 2t^2 \end{cases}$$

3.3 Reducerea ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n liniare cu coeficienţi constanţi la un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare cu coeficienţi constanţi

Considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul n liniară omogenă cu coeficienţi constanţi:

$$a_n \cdot x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = 0 \tag{3.8}$$

în care coeficientul a_n este presupus diferit de zero.

Ecuaţia diferenţială (3.8) are aceleaşi soluţii ca şi ecuaţia diferenţială:

$$x^{(n)} + b_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + b_1 \cdot \dot{x} + b_0 \cdot x = 0 \tag{3.9}$$

în care $b_i = \dfrac{a_i}{a_n}$. Ecuaţia (3.9) la rândul ei, este "echivalentă" cu sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare cu coeficienţi constanţi:

$$\dot{Y} = A \cdot Y \tag{3.10}$$

în care matricea coloană Y este $Y = (x, u^1, u^2, \ldots, u^{n-1})$, iar matricea pătrată A este:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

Valorile proprii ale acestei matrice sunt rădăcinile ecuaţiei algebrice

$$a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0. \tag{3.11}$$

Rezultă în acest fel că soluţiile ecuaţiei diferenţiale de ordinul n liniare (3.8) sunt funcţii de forma:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j t} P_{q_j - 1}(t) + \sum_{j=1}^{l} e^{\mu_j t} \left[Q_{r_j - 1}(t) \cos \nu_j t + R_{r_j - 1}(t) \sin \nu_j t \right]$$

în care $\lambda_j, j = \overline{1,k}$ sunt rădăcinile reale ale ecuaţiei (3.11) cu ordin de multiplicitate respectiv $q_1, \ldots, q_p$; $\mu_j + i\nu_k$, $k = \overline{1,l}$ sunt rădăcinile complexe ale ecuaţiei (3.11) cu ordin de multiplicitate r_j, iar P_{q_j-1}, Q_{r_j-1} şi R_{r_j-1} sunt polinoame de grad $q_j - 1$ respectiv $r_j - 1$.

Dacă ecuaţia diferenţială de ordinul n liniară cu coeficienţi constanţi este neomogenă:

$$a_n \cdot x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = f(t) \qquad (3.12)$$

şi $a_n \neq 0$, iar $f(t)$ este o funcţie continuă pe $I\!R^1$, atunci orice soluţie $x = x(t)$ a acestei ecuaţii este de forma:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j t} P_{q_j-1}(t) + \sum_{j=1}^{l} e^{\mu_j t} \left[Q_{r_j-1}(t) \cos \nu_j t + R_{r_j-1}(t) \sin \nu_j t\right] + \bar{x}(t)$$

unde $\overline{x}(t)$ este o soluţie fixată a ecuaţiei (3.12).

Dacă ecuaţia (3.12) nu are rădăcini pur imaginare şi f este periodică de perioadă T, atunci ecuaţia (3.12) are o singură soluţie periodică de perioadă T.

Problema 3.3.1 Arătaţi că ecuaţia diferenţială:

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = -E_0 \cdot \omega \sin \omega t$$

care guvernează evoluţia intensităţii curentului într-un circuit R, L, C (R, L, C constante pozitive) cuplat la o sursă de curent alternativ are o singură soluţie periodică pe perioadă $\frac{2\pi}{\omega}$ şi toate celelalte soluţii tind la această soluţie.

Rezolvare: Se consideră o soluţie particulară de forma

$$\overline{i}(t) = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t$$

care se înlocuieşte în ecuaţie şi se determină constantele A şi B. Aceasta este soluţia periodică căutată.
După aceasta, se scrie formula unei soluţii oarecare $i(t)$ şi se face diferenţa $i(t) - \overline{i}(t)$ care este o soluţie a ecuaţiei omogene ($f(t) = 0$). Deoarece $R > 0$ se obţine că $i(t) - \overline{i}(t) \to 0$ pentru $t \to \infty$ adică, $i(t) \to \overline{i}(t)$.

Exerciţii

Rezolvaţi următoarele ecuaţii diferenţiale de ordin superior liniare cu coeficienţi constanţi prin metoda reducerii la un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare cu coeficienţi constanţi:

1.

a) $\ddot{x} - x = 0 \quad x(0) = 2 \quad \dot{x}(0) = 0$ **R:** $x(t) = e^t + e^{-t}$

b) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1$ **R:** $x(t) = t \cdot e^{-t}$

c) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0 \quad x(1) = 1 \quad \dot{x}(1) = 0$ **R:** $x(t) = 3e^{2t-2} - 2te^{2t-2}$

d) $\ddot{x} + x = 0 \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ **R:** $x(t) = \sin t$

e) $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(1) = 1$ **R:** $x(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2.

a) $\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0 \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1 \quad \ddot{x}(0) = 2$

R: $x(t) = \frac{1}{2} \cdot e^t + \frac{2}{3} \cdot e^{2t} - \frac{1}{6} \cdot e^{-t}$

b) $\dddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = 0 \quad x(1) = 0 \quad \dot{x}(1) = 1 \quad \ddot{x}(1) = 2$

R: $x(t) = e^{t-1} + (\sin 1) \cdot \sin t - (\cos 1) \cdot \cos t$

c) $x^{(4)} - 5\ddot{x} + 4x = 0 \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1 \quad \ddot{x}(0) = 2 \quad \dddot{x}(0) = 3$

R: $x(t) = -\frac{1}{6} \cdot e^t + \frac{1}{6} \cdot e^{-2t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot e^{2t}$

3.4 Calculul simbolic al soluţiilor sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare cu coeficienţi constanţi

Pentru rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordin întâi *Maple* foloseşte funcţia *dsolve* (solve ordinary differential equations - ODEs) care a fost prezentă în capitolele precedente.

În scrierea sintaxei ecuaţia diferenţială va fi înlocuită cu lista de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi care formează sistemul de ecuaţii, respectiv condiţia iniţială va fi înlocuită cu lista condiţiilor iniţiale $x_i(t_0) = x_i^0$ corespunzătoare fiecărei funcţii necunoscute $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$:

$dsolve(\{ODE1, ODE2, ..., ODEn\});$

$dsolve(\{ODE1, ODE2, ..., ODEn\}, \{x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\}, extra.args);$

$dsolve(\{ODE1, ODE2, ..., ODEn, x_1(t_0){=}x_1^0, x_2(t_0){=}x_2^0, ..., x_n(t_0){=}x_n^0\},$
$\{x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\}, extra.args);$

Pentru exemplificare, vom rezolva următoarele siteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare cu coeficienţi constanţi:

1. Sistemul de două ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi omogen:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 8x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 + x_2 \end{cases} \tag{3.13}$$

   Pentru acest sistem vom considera condiţiile iniţiale $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ şi soluţia problemei cu date iniţiale va fi reprezentată grafic utilizând trei instrucţiuni de plotare:

```
> sys1_Eq1:=diff(x1(t),t)=-x1(t)+8*x2(t);
```

$$sys1_Eq1 := \frac{d}{dt}x1(t) = -x1(t) + 8\,x2(t)$$

```
> sys1_Eq2:=diff(x2(t),t)=x1(t)+x2(t);
```

$$sys1_Eq2 := \frac{d}{dt}x2(t) = x1(t) + x2(t)$$

```
> dsolve(sys1_Eq1,sys1_Eq2,x1(0)=1,x2(0)=1,x1(t),x2(t));
```

$$\{x2\,(t) = 5/6\,e^{3\,t} + 1/6\,e^{-3\,t}, x1\,(t) = 5/3\,e^{3\,t} - 2/3\,e^{-3\,t}\}$$

```
> sol_x1:=5/3*exp(3*t)-2/3*exp(-3*t):
> sol_x2:=5/6*exp(3*t)+1/6*exp(-3*t):
> plot([sol_x1,sol_x2],t=0..1,color=[red,blue],
  style=[line,point]);
```

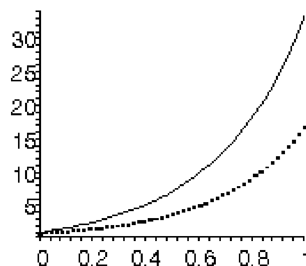


Figura 13

Soluţia problemei cu date iniţiale asociată acestui sistem va fi considerată

```
> with(DEtools):
> DEplot(sys1_Eq1,sys1_Eq2,x1(t),x2(t),t=0..1,
> [[x1(0)=1,x2(0)=1]],x1=0..40,x2=0..20,scene=
   [x1(t),x2(t)]);
```

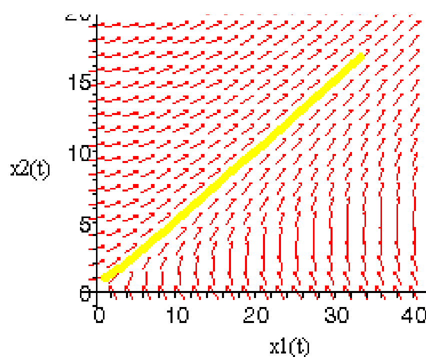


Figura 14

```
> with(DEtools):
> DEplot3d(sys1_Eq1,sys1_Eq2,x1(t),x2(t),t=0..1,
> [[x1(0)=1,x2(0)=1]],x1=0..40,x2=0..20,scene=
  [t,x1(t),x2(t)]);
```

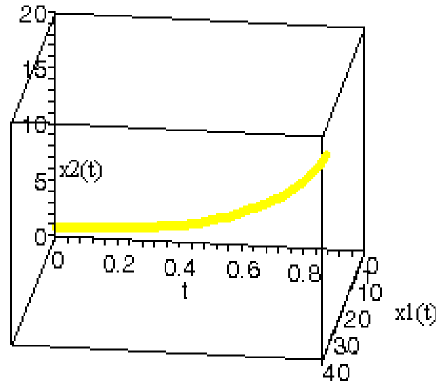


Figura 15

Se observă că, funcţia de plotare *plot* afişează curbele plane $x_1 = x_1(t)$ şi $x_2 = x_2(t)$ în acelaşi sistem de coordonate. Funcţia $with(DEtools) : DEplot$, odată cu rezolvarea sistemului afişează perechile de puncte $(x_1(t), x_2(t))$ care corespund domeniului de variaţie a variabilei independente t. Funcţia $with(DEtools) : DEplot3d$ permite reprezentarea în trei dimensiuni a curbei spaţiale ce reprezintă soluţia sistemului considerat.

2. Sistemul de trei ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi omogen:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 \; -x_2 \\ \dot{x_2} = \qquad -x_2 \; -x_3 \\ \dot{x_3} = \qquad\qquad -x_3 \end{cases} \tag{3.14}$$

Pentru acest sistem considerăm condiţiile iniţiale $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 2$, determinăm soluţia problemei cu date iniţiale şi apoi o vom reprezenta grafic:

```
> sys2_Eq1:=diff(x1(t),t)=-x1(t)-x2(t);
```

$$sys2_Eq1 := \frac{d}{dt}x1(t) = -x1(t) - x2(t)$$

```
> sys2_Eq2:=diff(x2(t),t)=-x2(t)-x3(t);
```

$$sys2_Eq2 := \frac{d}{dt}x2(t) = -x2(t) - x3(t)$$

```
> sys2_Eq3:=diff(x3(t),t)=-x3(t);
```

$$sys2_Eq3 := \frac{d}{dt}x3(t) = -x3(t)$$

```
> dsolve({sys2_Eq1,sys2_Eq2,sys2_Eq3},{x1(t),x2(t),x3(t)});
```

$$\{\, x1(t) = 1/2\,(_C3\,t^2 - 2\,_C2\,t + 2\,_C1)\,e^{-t},\; x2(t) = -(_C3\,t - _C2)\,e^{-t},\; x3(t) = _C3\,e^{-t} \,\}$$

```
> dsolve({sys2_Eq1,sys2_Eq2,sys2_Eq3,x1(0)=1,x2(0)=0,
 x3(0)=2});
```

$$\{\, x1(t) = 1/2\,(2\,t^2 + 2)\,e^{-t}\; x2(t) = -2\,te^{-t},\; x3(t) = 2\,e^{-t}\}$$

```
> plot([1/2*(2*t^2+2)*exp(-t),-2*t*exp(-t),2*exp(-t)],
t=-1.3..8,colour=[green,black,blue],thickness=[3,4,1],
style=[line,point,line]);
```

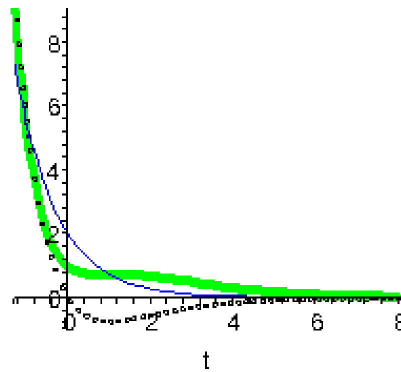


Figura 16

3. Sistemul de două ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi neomogen:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 - x_2 + 3t^2 \\ \dot{x_2} = -4x_1 - 2x_2 + 2 + 8t \end{cases} \tag{3.15}$$

Pentru acest sistem considerăm condiţiile iniţiale $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = 0$, determinăm soluţia problemei cu date iniţiale reprezentăm grafic acaestă soluţie:

```
> sys3_Eq1:=diff(x1(t),t)=x1(t)-x2(t)+3*t^2;
```

$$sys3_Eq1 := \frac{d}{dt}x1(t) = x1(t) - x2(t) + 3\,t^2$$

```
> sys3_Eq2:=diff(x2(t),t)=-4*x1(t)-2*x2(t)+2+8*t;
```

$$sys3_Eq2 := \frac{d}{dt}x2(t) = -4\,x1(t) - 2\,x2(t) + 2 + 8\,t$$

```
> dsolve({sys3_Eq1,sys3_Eq2});
```

$$\{\, x1(t) = e^{-3\,t}_C2 + e^{2\,t}_C1 - t^2$$
$$x2(t) = 4\,e^{-3\,t}_C2 - e^{2\,t}_C1 + 2\,t + 2\,t^2,\, \}$$

```
> dsolve({sys3_Eq1,sys3_Eq2,x1(1)=1,x2(1)=0});
```

$$\{\, x1(t) = \frac{12}{5}\,e^{-2}e^{2\,t} - 2/5\,e^3e^{-3\,t} - t^2,$$
$$x2(t) = -\frac{12}{5}\,e^{-2}e^{2\,t} - 8/5\,e^3e^{-3\,t} + 2\,t + 2\,t^2 \,\}$$

```
> x1:=12/5*exp(-2)*exp(2*t)-2/5*exp(3)*exp(-3*t)-t^2:
> x2:=-12/5*exp(-2)*exp(2*t)-8/5*exp(3)*exp(-3*t)+2*t+
    2*t^2:
> plot([x1,x2],t=-0.1..2,color=[red,green],style=
  [line,point]);
```

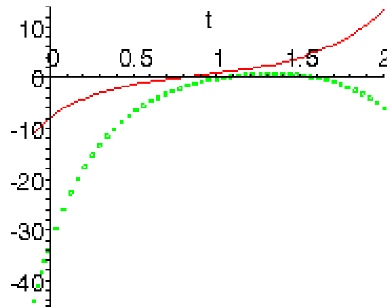


Figura 17

Capitolul 4

Teoreme de existenţă şi unicitate. Metode numerice. Proprietăţi calitative ale soluţiilor. Integrale prime

4.1 Teoreme de existenţă şi unicitate pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi neliniare

Fie problema cu date iniţiale

$$\dot{x} = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.1}$$

cu $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ şi $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Vom enunţa şi demonstra o teoremă referitoare la existenţa unei soluţii (locale) a problemei cu date iniţiale (4.1). Considerăm în acest scop două numere $a > 0$ şi $b > 0$, astfel ca dreptunghiul

$$\Delta = \{\, (t, x) | \ \ |t - t_0| \leq a \text{ şi } |x - x_0| \leq a\}$$

să fie inclus în Ω ; $\Delta \subset \Omega$.

Teorema 4.1.1 *(Cauchy- Lipschitz de existenţă a unei soluţii locale) Dacă funcţia f este continuă pe dreptunghiul Δ şi este lipschitziană în raport cu*

variabila x pe Δ, atunci problema cu date iniţiale (4.1) are o soluţie locală definită pe intervalul $I_h = [t_0 - h,\ t_0 + h]$, unde $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K+1}\right\}$, $M = \max\limits_{(t,x)\in\triangle} |f(t,x)|$ şi K este constanta lui Lipschitz pe Δ:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le K|x-y|, \quad \forall (t,x),(t,y) \in \triangle.$$

Demonstraţie: Considerăm funcţia constantă $x_0(t) \equiv x_0$ şi pornind de la ea, construim şirul de funcţii $\{x_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau))d\tau;\\
x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_1(\tau))d\tau;\\
x_3(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_2(\tau))d\tau;\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\\
x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))d\tau;\\
&\quad \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$(\forall) t \in I_h$.

Arătăm la început că funcţiile din acest şir sunt bine definite. Aceasta revine la a arăta că pentru orice $n \ge 1$ şi $t \in I_h$ avem $(t, x_n(t)) \in \Omega$. Folosim metoda inducţiei matematice, vom arăta că pentru orice $t \in I_h$ avem $(t, x_n(t)) \in \Delta$.

Etapa I (a verificării):

Pentru $n = 1$ avem:

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0(\tau))d\tau;$$

şi deci $|x_1(t) - x_0| \le M|t - t_0| \le Mh \le b,\ \ (\forall) t \in I_h$.

Rezultă astfel că $(t, x_1(t)) \in \Delta$ pentru orice $t \in I_h$.

Pentru $n = 2$ avem:

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_1(\tau))d\tau;$$

şi deci $|x_2(t) - x_0| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b$, $(\forall)t \in I_h$. Rezultă astfel că $(t, x_2(t)) \in \Delta$ pentru orice $t \in I_h$.

Etapa II (a implicaţiei):

Presupunem că $(t,x_n(t)) \in \Delta$, $(\forall)$ $t \in I_h$ şi arătăm că $(t, x_{n+1}(t)) \in \Delta$, $(\forall)$ $t \in I_h$.

Pentru aceasta calculăm $x_{n+1}(t)$ şi găsim

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))d\tau$$

de unde $|x_{n+1}(t) - x_0| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b$, $(\forall)$ $t \in I_h$. Rezultă $(t, x_{n+1}(t)) \in \Delta$ pentru orice $t \in I_h$.

Astfel am arătat că pentru $(\forall)n \geq 1$ şi $(\forall)t \in I_h$ avem $(t, x_n(t)) \in \Delta$.

Trecem acum să evaluăm maximul modulului $|x_{n+1}(t) - x_n(t)|$ pe I_h. Pentru aceasta, ţinem seamă de egalităţile:

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))d\tau$$

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))d\tau$$

pe care le scădem şi obţinem:

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq |K \int_{t_0}^{t} |x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)|d\tau|$$

De aici rezultă inegalitatea:

$$\max_{t \in I_h} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \frac{K}{K+1} \max_{\tau \in I_h} |x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)|$$

din care deducem:

$$\begin{aligned} \max_{t \in I_h} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| &\leq \left(\frac{K}{K+1}\right)^n \cdot \max_{t \in I_h} |x_1(t) - x_0| \leq \\ &\leq \left(\frac{K}{K+1}\right)^n \cdot M \cdot h \leq \left(\frac{K}{K+1}\right)^n \cdot b \end{aligned}$$

Scriem acum funcţia $x_n = x_n(t)$ sub forma:

$$x_n(t) = x_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}(t) - x_i(t))$$

şi remarcăm că, şirul $x_n(t)$ este şirul sumelor parţiale ale seriei de funcţii

$$x_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}(t) - x_n(t)).$$

Deoarece $|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \left(\frac{K}{K+1}\right)^n \cdot b$, $(\forall)$ $t \in I_h$, din convergenţa seriei numerice $b \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{K}{K+1}\right)^n$, cu teorema lui Weierstrass, rezultă că seria de funcţii $x_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}(t) - x_n(t))$ este absolut şi uniform convergentă pe intervalul I_h, la o funcţie $x = x(t)$. Prin urmare şirul sumelor parţiale, adică şirul $x_n(t)$ converge uniform la funcţia $x(t)$.

Observăm în continuare că pentru $(\forall)$ $t \in I_h$ avem

$$\left|\int_{t_0}^{t}[f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))]ds\right| \leq K \cdot h \cdot \max_{s \in I_h}|x_n(s) - x(s)|$$

şi prin urmare, avem egalitatea:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \ (\forall) t \in I_h.$$

Trecem acum la limită în egalitatea

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))d\tau$$

şi obţinem egalitatea

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau.$$

Aceasta arată că funcţia $x(t)$ este de clasă C^1 şi verifică $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$; $x(t_0) = x_0$.

Am demonstrat în acest fel că problema cu date iniţiale (4.1) are o soluţie definită pe intervalul I_h. S-ar putea ca problema (4.1) să aibe soluţie definită pe un interval mai mare ca intervalul I_h. Aceasta este motivul pentru care soluţia găsită se numeşte *soluţie locală*.

Teorema 4.1.2 *(Cauchy-Lipschitz de unicitate a soluţiei locale)*
Dacă sunt îndeplinite condiţiile din teorema lui Cauchy-Lipschitz de existenţă a unei soluţii locale a problemei cu date iniţiale (t_0, x_0), *atunci problema* (4.1) *nu poate avea două soluţii diferite pe un interval* J, $I_h \supset J \ni t_0$

Demonstraţie: Presupunem prin absurd că funcţiile $x, y : J \subset I_h \to I\!R^1$ sunt două soluţii locale ale problemei cu date iniţiale. Aceste soluţii verifică:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \qquad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

Rezultă de aici că, funcţiile $x(t)$ şi $y(t)$ verifică inegalitatea:

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon + K \left| \int_{t_0}^{t} |x(\tau) - y(\tau)| d\tau \right| \quad (\forall) t \in J. \quad (\forall)\varepsilon > 0.$$

De aici rezultă că:

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon \cdot e^{K|t-t_0|} \quad (\forall) t \in J, \quad (\forall)\varepsilon > 0.$$

Pentru $t \in J$, t fixat, trecem la limită pentru $\varepsilon \to 0$ şi obţinem că
$x(t) = y(t), \quad (\forall) t \in J$.

Problema 4.1.1
Se ştie că materia radioactivă se dezintegrează şi viteza de dezintegrare este

proporţională, la orice moment, cu cantitatea de materie radioactivă rămasă. Dacă $x(t)$ reprezintă cantitatea de materie radioactivă rămasă atunci

$$\dot{x} = -a \cdot x,$$

unde a este o constantă pozitivă.

În cazul dezintegrării carbonului radioactiv C^{14}, $a = \dfrac{1}{8000}$ şi deci în acest caz, ecuaţia devine $\dot{x} = -\dfrac{1}{8000} \cdot x$.

Arătaţi că, dacă la un moment t_0 se cunoaşte cantitatea de carbon radioactiv C^{14} dintr-o mostră de animal sau plantă găsită într-un strat geologic, atunci se poate reconstitui vârsta acelei mostre.

Rezolvare

Fie x_0 cantitatea de carbon radioactiv C^{14} dintr-o mostră la momentul t_0.

Problema cu date iniţiale:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{1}{8000} \cdot x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

are soluţie unică şi aceasta este dată de

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 e^{-\frac{1}{8000}(t-t_0)}.$$

Dacă x_1 este valoarea normală a cantităţii de carbon radioactiv C^{14} în starea vie a animalului sau plantei atunci, egalând

$$x_1 = x_0 e^{-\frac{1}{8000}(t-t_0)}$$

găsim o ecuaţie în t, care ne dă timpul t în care animalul sau planta erau vii, iar diferenţa $t - t_0$ arată vârsta mostrei.

Problema 4.1.2

Un rezervor cilindric are o gaură circulară la bază prin care lichidul din rezervor se poate scurge. O întrebare asemănătoare cu cea din Problema 4.1.1 este urmatoarea: dacă la un moment dat vedem că rezervorul este gol putem oare să ştim dacă acesta a fost odată plin şi când?

Răspunsul este evident nu. Cum se explică?

Rezolvare:
Fie $x(t)$ înălţimea lichidului din rezervor la momentul t. Notăm cu A aria bazei cilindrului şi cu a aria găurii. După legea lui Toricelli avem:

$$\dot{x} = -\frac{a}{A}\sqrt{2g} \cdot \sqrt{x}$$

Dacă I este înălţimea rezervorului, atunci $x = I$ corespunde la situaţia când rezervorul este plin şi $x = 0$ la situaţia când rezervorul este gol. Dacă la momentul $t = 0$ rezervorul este plin, atunci $x(0) = I$ şi avem:

$$2\sqrt{u}|_I^x = -\frac{a}{A}\sqrt{2g} \cdot t$$

de unde:

$$x(t) = \left(\sqrt{I} - \frac{a}{2A}\sqrt{2g} \cdot t\right)^2.$$

Timpul de golire este $t_* = \dfrac{2A}{a}\sqrt{\dfrac{I}{2g}}$ şi deci:

$$x(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{a}{2A}\sqrt{2g} \cdot t_* - \dfrac{a}{2A} \cdot \sqrt{2g} \cdot t\right)^2 & \text{pentru} \quad 0 \leq t \leq t_* \\ 0 & \text{pentru} \quad t \geq t_* \end{cases}$$

reprezintă legea de golire a rezervorului dacă acesta a fost plin la momentul $t = 0$.

Există o infinitate de soluţii $x(t)$ ale ecuaţiei

$$\dot{x} = -\frac{a}{A}\sqrt{2g} \cdot \sqrt{x}$$

care pentru $t = t_*$ sunt egale cu zero. Acestea sunt date de formula:

$$x_\tau(t) = \begin{cases} \dfrac{2g \cdot a^2}{4A^2}(t_* - t - \tau)^2 & \text{pentru} \quad -\tau \leq t \leq t_* - \tau \\ 0 & \text{pentru} \quad t \geq t_* - \tau \end{cases}$$

Soluţia $x_\tau(t)$ reprezintă legea de golire a rezervorului care la momentul $-\tau$ a fost plin. Pe lângă aceste soluţii problema Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{a\sqrt{2g}}{A} \cdot \sqrt{x} \\ x(t_*) = 0 \end{cases}$$

mai are ca soluţie funcţia identic nulă $x(t) = 0$. Această soluţie corespunde situaţiei în care rezervorul nu a fost umplut niciodată. Rezultă astfel că soluţiile problemei Cauchy descriu toate situaţiile posibile şi multitudinea acestora se manifestă prin neunicitatea soluţiei problemei Cauchy.

Concluzii

1. Dacă variabila de stare $x(t)$ a unui proces fizic sau chimic este soluţia unei probleme cu date iniţiale $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, atunci această variabilă de stare trebuie căutată printre soluţiile acestei probleme Cauchy.

2. Dacă problema cu date iniţiale în cauză are o singură soluţie, atunci găsind-o este clar că aceasta este cea care descrie evoluţia în timp a variabilei de stare.

3. Dacă problema cu date iniţiale în cauză are mai multe soluţii, atunci găsind una din aceste soluţii nu avem nici un drept să susţinem că aceasta este aceea care descrie evoluţia în timp a variabilei de stare. Mai precis, avem nevoie de informaţii suplimentare care să permită identificarea acelei soluţii care descrie evoluţia variabilei de stare.

4. În caz de neunicitate găsirea unei soluţii a problemei cu date iniţiale nu înseamna rezolvarea problemei de fizică.

4.2 Teoreme de existenţă şi unicitate pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi neliniare

Definiţia 4.2.1 *Un sistem de ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul întâi explicit este un sistem de n relaţii de dependenţă funcţională de forma:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ .... \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{4.2}$$

dintre un sistem de n funcţii necunoscute $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$ *şi derivatele acestora* $\dot{x}_1,\ \dot{x}_2, ...,\ \dot{x}_n$.

În sistemul (4.2) funcţiile $f_1,\ f_2, ...,\ f_n$ sunt funcţii reale considerate cunoscute definite pe $I \times D$; $I \subset \mathbb{R}^1$, I interval deschis şi $D \subset \mathbb{R}^n$, D domeniu.

Definiţia 4.2.2 *Un sistem ordonat de n funcţii reale* $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$ *definite pe un interval* $J \subset I$, *de clasă* C^1 *este o soluţie a sistemului (4.2) dacă* $(t,\ x_1(t), ...,\ x_n(t)) \in I \times \Omega, \quad (\forall) t \in J$ *şi:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \\ .... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) \end{cases}$$

pentru orice $t \in J$.

Definiţia 4.2.3 *Fiind date:* $t_0 \in I$ *şi* $(x_1^0, ...,\ x_n^0) \in D$ *problema determinării soluţiei* $x_1(t), ...,\ x_n(t)$ *a sistemului (4.2) care verifică* $x_i(t_0) = x_i^0$ *pentru* $i = \overline{1, n}$, *se numeşte problemă cu date iniţiale sau problemă Cauchy.*

Pentru reprezentarea matriceală a sistemului (4.2) notăm $F : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ funcţia matriceală definită prin

$$F(t, x_1, x_2, ..., x_n) = (f_1(t, x_1, ..., x_n), f_2(t, x_1, ..., x_n), ..., f_n(t, x_1, ..., x_n))^T$$

şi cu X matricea coloană $(x_1, x_2, ..., x_n)^T$. Cu aceste notaţii sistemul (4.2) se scrie sub forma matriceală:

$$\dot{X} = F(t, X). \tag{4.3}$$

În această problemă derivarea funcţiei matriceale $X(t)$ înseamnă derivarea elementelor matricei.

Observaţia 4.2.1 Problema cu date iniţiale (problema Cauchy) se scrie matriceal sub forma:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(t, X) \\ \\ X(t_0) = X^0 \end{cases} \tag{4.4}$$

şi constă în determinarea funcţiei matriceale $X(t)$ care verifică (4.3) şi condiţia iniţială $X(t_0) = X^0$.

Observaţia 4.2.2 O funcţie $X : J \subset I \to I\!R^n$ de clasă C^1 este soluţie a problemei (4.4) dacă $\dot{X} = F(t, X(t))$, $(\forall) t \in J$ şi $X(t_0) = X^0$ (se presupune că $t_0 \in J$).

Considerăm $a > 0$, $b > 0$ astfel ca cilindrul Δ:

$$\Delta = \left\{(t, x) : |t - t_0| \leq a \text{ şi } \| x - x^0 \| \leq b\right\}$$

să fie inclus în domeniul $I \times D$.

Teorema 4.2.1 *(Cauchy-Lipschitz de existenţă a unei soluţii locale) Dacă funcţia F este continuă pe Δ şi este lipschitziană în raport cu X pe Δ, atunci problema cu date iniţiale (4.4) are o soluţie locală definită pe intervalul $I_h = [t_0 - h, t_0 + h]$ unde $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K+1}\right\}$; $M = \max_{(t,x) \in \Delta} \|F(t, X)\|$ şi K este constanta lui Lipschitz:*

$$\|F(t, X') - F(t, X'')\| \leq K \|X' - X''\|, \quad (\forall)\ (t, X'), (t, X'') \in \Delta.$$

Demonstraţie: Construim următorul şir de funcţii:

$$\begin{aligned} X^0(t) &= X^0 \\ X^1(t) &= X^0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X^0(\tau))d\tau \\ X^2(t) &= X^0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X^1(\tau))d\tau \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X^{k+1}(t) &= X^0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X^k(\tau))d\tau \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Funcţiile din acest şir sunt corect definite, întrucât pentru orice $t \in I_h$ şi $k \in I\!N$ are loc apartenenţa $(t, X^k(t)) \in \Delta$ (demonstraţia se face prin inducţie). Urmând raţionamentul din paragraful precedent evaluăm diferenţa $\max_{t \in I_h} \|X^{k+1}(t) - X^k(t)\|$ şi găsim:

$$\max_{t \in I_h} \|X^{k+1}(t) - X^k(t)\| \leq \frac{K}{K+1} \max_{t \in I_h} \|X^k(t) - X^{k-1}(t)\|,$$

de unde deducem inegalitatea

$$\max_{t \in I_h} \|X^{k+1}(t) - X^k(t)\| \leq \left(\frac{K}{K+1} \right)^k \cdot b.$$

Scriem acum funcţia $X^k(t)$ sub forma:

$$X^k(t) = X_0(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \left(X^{i+1}(t) - X^i(t) \right)$$

şi remarcăm că, şirul $\left\{ X^k(t) \right\}_{k \in I\!N}$ este şirul sumelor parţiale ale seriei de funcţii

$$X^0(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \left[X^{i+1}(t) - X^i(t) \right].$$

Deoarece

$$\|X^{k+1}(t) - X^k(t)\| \leq \left(\frac{K}{K+1} \right)^k \cdot b$$

pentru orice $t \in I_h$, din convergenţa seriei numerice $b \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{K}{K+1} \right)^k$, folosind teorema lui Weierstrass, rezultă că seria de funcţii

$$X^0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \left[X^{k+1}(t) - X^k(t) \right]$$

este absolut şi uniform convergentă pe intervalul I_h, la o funcţie $X(t)$. Astfel, şirul sumelor parţiale adică şirul $X^k(t)$, converge uniform la funcţia $X(t)$.

Inegalitatea:

$$\left\| \int_{t_0}^{t} [F(\tau, X^k(\tau)) - F(\tau, X(\tau))] d\tau \right\| \leq K \cdot h \cdot \max_{\tau \in I_h} \left\| X^k(\tau) - X(\tau) \right\|$$

valabilă pentru orice $t \in I_h$ şi $k \in I\!N$ permite să obţinem egalitatea:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{t_0}^{t} F(\tau, X^k(\tau)) d\tau = \int_{t_0}^{t} F(\tau, X(\tau)) d\tau.$$

Trecem acum la limită în egalitatea:

$$X^{k+1}(t) = X^0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X^k(\tau)) d\tau$$

şi obţinem:

$$X(t) = X^0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X(\tau)) d\tau.$$

Aceasta arată că funcţia $X(t)$ este de clasă C^1 şi verifică

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(t, X(t)) \\ \\ X(t_0) = X^0 \end{cases}$$

În concluzie, problema cu date iniţiale (4.4) are o soluţie definită pe intervalul I_h. Este posibil ca problema(4.4) să aibe soluţie definită pe un interval J mai mare ca intervalul I_h. Acesta este motivul pentru care soluţia găsită se numeşte *soluţie locală.*

Teorema 4.2.2 *(Cauchy-Lipschitz de unicitate a soluţiei locale)*
Dacă sunt indeplinite condiţiile din teorema Cauchy-Lipschitz de existenţă a unei soluţii locale pentru problema cu date iniţiale (t_0, X^0)*, atunci problema (4.4) nu poate avea două soluţii diferite pe un interval* $J \subset I_h$*,* $t_0 \in J$*.*

Demonstraţie: Presupunem prin absurd că funcţiile

$$X', X'' : J \subset I_h \to I\!R^n \ (t_0 \in J)$$

sunt două soluţii locale ale problemei cu date iniţiale (4.4). Aceste soluţii verifică:

$$X'(t) = X^0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X'(\tau))d\tau, \quad X''(t) = X^0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X''(\tau))d\tau.$$

De aici rezultă că $X'(t)$, $X''(t)$ satisfac inegalitatea:

$$\|X'(t) - X''(t)\| < \varepsilon + K \left| \int_{t_0}^{t} \|X'(\tau) - X''(\tau)\| d\tau \right| \quad (\forall)\ t \in J,\ (\forall)\ \varepsilon > 0,$$

de unde se obţine:

$$\|X'(t) - X''(t)\| < \varepsilon e^{K|t-t_0|} \quad (\forall) t \in J, \quad (\forall) \varepsilon > 0.$$

Trecând la limită pentru $\varepsilon \to 0$ se obţine egalitatea $X'(t) = X''(t)$, $(\forall) t \in J$, $t -$ fixat.

4.3 Proprietăţi calitative ale soluţiilor

Considerăm $I \subset I\!R^1$ un interval deschis, $D \subset I\!R^n$ un domeniu,
$F : I \times D \to I\!R^n$ o funcţie vectorială şi sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi scris sub forma matriceală:

$$\dot{X} = F(t, X). \tag{4.5}$$

Fie $X^1 : J_1 \subset I \to D$ şi $X^2 : J_2 \subset I \to D$ două soluţii locale ale sistemului (4.5).

Definiţia 4.3.1 *Zicem că soluţia locală X^2 este o prelungire a soluţiei locale X^1 şi notăm $X^1 \leq X^2$, dacă $J_1 \subset J_2$ şi $X^1(t) = X^2(t)$ pentru orice $t \in J_1$.*

Relaţia binară $X^1 \leq X^2$ introdusă în mulţimea soluţiilor locale ale sistemului (4.5) este o relaţie de ordine parţială.

Definiţia 4.3.2 *Orice soluţie locală a sistemului (4.5) care este element maximal (i.e. nu mai poate fi prelungită) se numeşte soluţie saturată.*

O soluţie saturată este o soluţie care nu este prelungibilă.

Teorema 4.3.1 *Dacă funcţia $F : I \times D \to I\!R^n$ este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe domeniul $\Omega = I \times D$ şi $(t_0, X^0) \in I \times D$, atunci problema cu date iniţiale:*

$$\begin{cases} \dot{X} = F(t, X) \\ \\ X(t_0) = X^0 \end{cases} \tag{4.6}$$

are soluţie saturată $X(t; t_0, X^0)$ unică.

Demonstraţie: Vom face demonstraţia pentru cazul $n = 1$, cazul $n \geq 2$ făcându-se analog.

Considerăm familia de funcţii $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, $x_\alpha : I_\alpha \to I\!R^1$, $\quad t_0 \in I_\alpha$, formată cu toate soluţiile locale ale problemei:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Teorema Cauchy-Lipschitz de existenţă şi unicitate a soluţiei locale pentru problema cu date iniţiale în cazul unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, asigură faptul că această familie de funcţii are cel puţin un element.

Considerăm intervalul deschis $I = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$, precum şi funcţia $x = x(t)$ definită pe I în modul următor:

"pentru $t \in I$ considerăm $\alpha \in \Lambda$, astfel ca $t \in I_\alpha$ şi definim $x(t) = x_\alpha(t)$".

Această definiţie este corectă dacă, pentru orice $t \in I_{\alpha'} \cap I_{\alpha''}$, avem $x_{\alpha'}(t) = x_{\alpha''}(t)$. Analizăm această implicaţie pentru $t > t_0$ (cazul $t < t_0$ se tratează la fel).

Raţionăm prin reducere la absurd şi presupunem că există $t_1 > t_0,\ \ t_1 \in I_{\alpha'} \cap I_{\alpha''}$, astfel ca $x_{\alpha'}(t_1) \neq x_{\alpha''}(t_1)$. Considerăm în continuare

$$t_* = \inf\{t_1 : t_1 > t_0, t_1 \in I_{\alpha'} \cap I_{\alpha''}, x_{\alpha'}(t_1) \neq x_{\alpha''}(t_1)\}$$

şi remarcăm că

$$x_{\alpha'}(t_*) = x_{\alpha''}(t_*) = x_*.$$

Punctul (t_*, x_*) este în domeniul Ω, $(t_*, x_*) \in \Omega$, şi putem considera constantele pozitive a_*, b_*, K_* astfel ca:

- dreptunghiul $\Delta_* = \{(t, x) \colon\ |t - t_*| \leq a_*, |x - x_*| \leq b_*\}$ să fie inclus în Ω ($\Delta_* \subset \Omega$);

- intervalul $[t_*, t_* + a_*]$ să fie inclus în intersecţia $I_{\alpha'} \cap I_{\alpha''}$;

- pentru orice $t \in [t_*, t_* + a_*]$ să avem:

$$|x_{\alpha'}(t) - x_*| \leq b_* \ \text{ şi } \ \ |x_{\alpha''}(t) - x_*| \leq b_*;$$

- pentru orice $(t, x), (t, y) \in \Delta_*$ să avem:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K_*|x - y|.$$

Fie acum $t_1 \in [t_*, t_* + a_*]$, astfel ca $x_{\alpha'}(t_1) \neq x_{\alpha''}(t_1)$. Din definiţia lui t_* rezultă că, există asemenea puncte t_1, oricât de aproape de t_*

Pentru t_1 fixat, fie $\varepsilon > 0$ astfel ca $\varepsilon < |x_{\alpha'}(t_1) - x_{\alpha''}(t_1)|e^{-K_* \cdot a_*}$.

Pe de altă parte, pentru orice $t \in [t_*, t_* + a_*]$ avem:

$$x_{\alpha'}(t) = x_* + \int_{t_*}^{t} f(s, x_{\alpha'}(s))ds,$$

$$x_{\alpha''}(t) = x_* + \int_{t_*}^{t} f(s, x_{\alpha''}(s))ds,$$

din care rezultă inegalităţile:

$$|x_{\alpha'}(t) - x_{\alpha''}(t)| \leq \int_{t_*}^{t} |f(s, x_{\alpha'}(s)) - f(s, x_{\alpha''}(s))|ds \leq$$

$$\leq K_* \int_{t_*}^{t} |x_{\alpha'}(s) - x_{\alpha''}(s)|ds < \varepsilon + K_* \int_{t_*}^{t} |x_{\alpha'}(s) - x_{\alpha''}(s))| \ ds.$$

Astfel, obţinem că:

$$|x_{\alpha'}(t) - x_{\alpha''}(t)| < \varepsilon e^{K_* a_*}, \quad (\forall) \ t \in [t_*, t_* + a_*].$$

iar din modul de alegere a lui ε rezultă inegalitatea:

$$|x_{\alpha'}(t) - x_{\alpha''}(t)| < |x_{\alpha'}(t_1) - x_{\alpha''}(t_1)|, \quad (\forall) \ t \in [t_*, t_* + a_*]$$

care este o contradicţie.

Astfel, rezultă în final că funcţia $x = x(t)$ este corect definită pe intervalul I.

Urmează să arătăm că funcţia $x = x(t)$ este soluţie a problemei cu date iniţiale (4.7).

Deoarece pentru orice $\alpha \in \Lambda$ avem $x_\alpha(t_0) = x_0$, rezultă:

$$x(t_0) = x_0.$$

Fie acum $t_1 \in I$ şi $\alpha_1 \in \Lambda$, astfel ca $t_1 \in I_{\alpha_1}$. Pentru orice $t \in I_{\alpha_1}$, avem $x(t) = x_{\alpha_1}(t)$ şi prin urmare

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_{\alpha_1}(t) = f(t, x_{\alpha_1}(t)) = f(t, x(t)), \quad (\forall) t \in I_{\alpha_1}.$$

În particular, pentru $t = t_1$ avem

$$\dot{x}(t_1) = f(t, x(t_1)).$$

Rezultă în acest fel că funcţia $x = x(t)$ este soluţie a problemei cu date iniţiale (4.7).

Urmează să mai arătăm că funcţia $x = x(t)$ definită pe intervalul I este o soluţie saturată. Fie în acest scop $y : J \to I\!R^1$ (J interval deschis, $t_0 \in J$) o soluţie locală a problemei cu date iniţiale (4.7).
Evident, funcţia y aparţine familiei $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ şi prin urmare:

$$J \subset I = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha \quad \text{şi} \quad x(t) = y(t).$$

Astfel am demonstrat existenţa şi unicitatea soluţiei saturate a problemei cu date iniţiale (4.7). Această soluţie saturată va fi notată cu $x = x(t; t_0, x_0)$ iar intervalul deschis pe care este definită această soluţie saturată va fi notat cu I_0.

În condiţiile din teorema precedentă considerăm soluţia saturată $X(t; t_0, X^0)$ a problemei Cauchy (4.6) definită pe intervalul deschis $I_0 = (\alpha_0, \beta_0) \subset I$.

Teorema 4.3.2 *Pentru orice $t_1 \in I_0$ soluţia saturată $X(t;t_1,X(t_1;t_0,X^0))$ a problemei cu date iniţiale*

$$\dot{X} = F(t, X), \quad X(t_1) = X(t_1; t_0, X^0) = X^1 \tag{4.8}$$

coincide cu soluţia saturată $X(t; t_0, X^0)$.

Demonstraţie: Vom face demonstraţia pentru cazul $n = 1$, analog făcându-se în cazul $n \geq 2$.

Notăm cu $I_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ intervalul de definiţie a soluţiei saturate a problemei cu date iniţiale:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_1) = x(t_1; t_0, x_0) = x_1. \tag{4.9}$$

Deoarece $x(t_1; t_0, x_0) = x_1$, funcţia $x = x(t; t_0, x_0)$ este soluţie locală a problemei cu date iniţiale (4.9).
Rezultă că $I_0 \subset I_1$ şi $x(t; t_0, x_0) = x(t; t_1, x_1)$, $(\forall)\ t \in I_0$.

Pe de altă parte, din faptul că $x(t; t_0, x_0)$ este soluţie saturată, rezultă că $I_0 \supset I_1$ şi $x(t; t_0, x_0) = x(t; t_1, x_1)$.

Teorema 4.3.3 *Dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

(i) $\beta_0 < +\infty$ *(respectiv* $\alpha_0 > -\infty$*);*

(ii) şirul de numere $\{t_n\}_n$ *din* I_0 *converge la* β_0 *(respectiv* α_0*);*

(iii) şirul de vectori $\{X(t_n; t_0, X^0)\}_n$ *este convergent la un vector* Λ,

atunci punctul (β_0, Λ) *(respectiv* (α_0, Λ)*) aparţine frontierei domeniului* $\Omega = I \times D$; $(\beta_0, \Lambda) \in \partial\Omega$ *(respectiv* $(\alpha_0, \Lambda) \in \partial\Omega$ *)*

Demonstraţie: Facem demonstraţia pentru $n = 1$ urmând ca pentru $n \geq 2$ să se facă în mod analog.

Pentru orice $t \in I_0$ punctul $(t, x(t; t_0, x_0))$ aparţine domeniului Ω şi, prin urmare, punctul (β_0, λ) aparţine aderenţei domeniului Ω, $(\beta_0, \lambda) \in \overline{\Omega}$. Putem arăta că (β_0, λ) aparţine frontierei $\partial\Omega$, arătând că (β_0, λ) nu aparţine domeniului Ω.

Raţionăm prin reducere la absurd şi presupunem că $(\beta_0, \lambda) \in \Omega$.

Considerăm $a > 0, b > 0, K > 0, M > 0$ astfel ca dreptunghiul

$$\Delta = \{(t, x) : |t - \beta_0| \leq a, |x - \lambda| \leq b\}$$

să fie inclus în domeniul Ω $(\Delta \subset \Omega)$, funcţia f să verifice $|f(t, x)| \leq M$ pentru orice $(t, x) \in \Delta$, şi $|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$ pentru orice $(t, x), (t, y) \in \Delta$.

Fie acum $\varepsilon > 0$ astfel ca $\varepsilon < \min\left\{a - 2\varepsilon, \dfrac{b - 2\varepsilon}{M}, \dfrac{1}{K + 1}\right\}$ şi $t_1 < \beta_0$ astfel ca $|t_1 - \beta_0| < \varepsilon$ şi $|x(t_1; t_0, x_0) - \lambda| < \varepsilon$.

Soluţia saturată $x = x(t; t_1, x(t_1; t_0, x_0))$ a problemei cu date iniţiale

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_1) = x(t_1; t_0, x_0)$$

este definită cel puţin pe intervalul

$$I_\delta = [t_1 - \delta, t_1 + \delta] \ \text{ cu } \ \delta = \min\left\{a - 2\varepsilon, \frac{b - 2\varepsilon}{M}, \frac{1}{K + 1}\right\}$$

şi verifică

$$x(t; t_1, x(t_1; t_0, x_0)) = x(t; t_0, x_0), \quad (\forall)\ t \in I_\delta \cap I_0.$$

Întrucât $t_1 + \delta > t_1 + \varepsilon > \beta_0$, rezultă că soluţia saturată $x(t; t_0, x_0)$ este prelungibilă, ceea ce este absurd.

Teorema 4.3.4 *Dacă* $I = \mathbb{R}^1$, $D = \mathbb{R}^n$ *şi* $\beta_0 < +\infty$ *(respectiv* $\alpha_0 > -\infty$*), atunci soluţia saturată* $X(t; t_0, X^0)$ *este nemărginită pe* $[t_0, \beta_0)$ *(respectiv* $(\alpha_0, t_0]$*).*

Demonstraţie: Pentru cazul $n = 1$, raţionăm prin reducere la absurd şi presupunem că soluţia saturată $x = x(t; t_0, x_0)$ este mărginită pe $[t_0, \beta_0)$. Considerăm $m > 0$, astfel ca $|x(t; t_0, x_0)| \leq m$, $(\forall)\ t \in [t_0, \beta_0)$ şi $t_n \in [t_0, \beta_0)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \beta_0$. Şirul $\{x(t_n; t_0, x_0)\}_n$ este mărgint şi are un subşir convergent la un număr λ. Deoarece $\Omega = I\!R^n$ punctul (β_0, λ) aparţine lui Ω, ceea ce este în contradicţie cu teorema precedentă.

Pentru cazul $n \geq 2$ se raţionează în mod analog.

Teorema 4.3.5 *Dacă $I = I\!R^1$, $D = I\!R^n$ şi F este lipschitziană pe orice bandă de forma $\Delta = J \times I\!R^n$, unde $J \subset I\!R^1$ este un interval compact oarecare, atunci orice soluţie saturată este definită pe $I\!R^1$.*

Demonstraţie: Pentru cazul $n = 1$, raţionăm prin reducere la absurd şi presupunem că intervalul de definiţie $I_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ al soluţiei saturate $x = x(t; t_0, x_0)$ este mărginit la dreapta: $\beta_0 < +\infty$.

Pentru $t \in [t_0, \beta_0)$ scriem inegalitatea:

$$|x(t; t_0, x_0) - x_0| \leq \int\limits_{t_0}^{t} |f(s, x(s : t_0, x_0)) - f(s, x_0)| ds + \int\limits_{t_0}^{t} |f(s, x_0)| ds \leq$$

$$\leq K_{\beta_0} \int\limits_{t_0}^{t} |x(s; t_0, x_0) - x_0| ds + (\beta_0 - t_0) \sup_{s \in [t_0, \beta_0]} |f(s, x_0)|.$$

Rezultă de aici că pentru orice $t \in [t_0, \beta_0]$ avem:

$$|x(t; t_0, x_0) - x_0| \leq (\beta_0 - t_0) \cdot \sup_{s \in [t_0, \beta_0]} |f(s, x_0)| \cdot e^{K_{\beta_0}(\beta_0 - t_0)}.$$

Această inegalitate arată că funcţia $x(t; t_0, x_0)$ este mărginită pe intervalul $[t_0, \beta_0)$, ceea ce este în contradicţie cu concluzia din teorema anterioară.

Analog se face raţionamentul pentru cazul $n \geq 2$.

Consecinţa 4.3.1 *Dacă $I = (a, b)$, $D = I\!R^n$ şi $\beta_0 < b$ (respectiv $\alpha_0 > a$), atunci soluţia saturată este nemărginită pe intervalul $[t_0, \beta)$ (respectiv $(\alpha_0, t_0]$).*

Consecinţa 4.3.2 *Dacă $I = (a, b)$, $D = I\!R^n$ şi F este lipschitziană în raport cu X pe orice bandă de forma $J \times I$, unde $J \subset I\!R^1$ este un interval compact inclus în I, atunci orice soluţie saturată este definită pe I.*

Teorema 4.3.6 *Dacă funcţia de clasă* $\mathcal{C}^1$, $F : I\!R^1 \times I\!R^n \to I\!R^n$ *nu depinde de* t*, atunci pentru orice* $X^0 \in I\!R^n$ *şi* $t_1, t_2 \in I\!R^1$*, avem:*

$$X(t_1 + t_2; 0, X^0) = X(t_2; 0, X(t_1; 0, X^0)) = X(t_1; 0, X(t_2; 0, X^0))$$

Demonstraţie: Demonstrăm teorema pentru $n = 1$.

Se observă că pentru $t_2 = 0$ au loc:

$$x(t_1 + t_2; 0, x_0) = x(t_2; 0, x(t_1; 0, x_0)) = x(t_1; 0, x(t_2; 0, x_0)).$$

În continuare se remarcă faptul că avem egalitatea:

$$\frac{d}{dt} x(t + t_1; 0, x_0) = f(x(t + t_1; 0, x_0))$$

şi deducem că $x(t+t_1; 0, x_0)$ este soluţia saturată a problemei cu date iniţiale

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x(t_1; 0, x_0).$$

Rezultă în acest fel egalitatea:

$$x(t + t_1; 0, x_0) = x(t; 0, x(t_1 : 0, x_0),$$

pentru orice t. În particular, pentru $t = t_2$, se obţine prima egalitate din enunţ.

Pentru cazul $n \geq 2$ teorema se demonstrează analog.

Fie I un interval real deschis ($I \in I\!R^1$), Ω un domeniu deschis în $I\!R^n$ ($\Omega \in I\!R^n$) şi $F : I \times \Omega \to I\!R^n$, $F = F(t, X)$ o funcţie de clasă C^1. Considerăm în continuare condiţia iniţială $(t_0,\ X^0) \in I \times \Omega$ şi soluţia maximală $X = X(t; t_0, X^0)$ a problemei Cauchy

$$\dot{X} = F(t, X), \qquad X(t_0) = X^0.$$

Notăm cu I_0 intervalul de definiţie al soluţiei maximale $X = X(t; t_0, X^0)$.

Teorema 4.3.7 *(de dependenţă continuă de "poziţia" iniţială* X^0*)*
Pentru orice interval compact $I_* = [T_1, T_2]$*, inclus în intervalul* $I_0 (I_* \subset I_0)$*, care conţine punctul* t_0 *în interior* ($t_0 \in \overset{\circ}{I_*}$) *şi pentru orice* $\varepsilon > 0$*, există*

$\delta = \delta(\varepsilon, I_*)$, astfel ca, pentru orice X^1 cu $\|X^1 - X^0\| < \delta$, soluţia saturată $X^1 = X^1(t; t_0, X^1)$ a problemei Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X} = F(t, X) \\ \\ X(t_0) = X^1 \end{cases}$$

este definită cel puţin pe intervalul I_* şi verifică inegalitatea:

$$\|X(t; t_0, X^1) - X(t; t_0, X^0)\| < \varepsilon, \quad (\forall)\ t \in I_*.$$

Demonstraţie: Pentru $t \in I_*$, fie $a_t > 0$ şi $b_t > 0$, astfel ca cilindrul $\Delta_t = \{(\tau, X) : |\tau - t| \leq a_t$ şi $\|X - X(t; t_0, X^0)\| \leq b_t\}$ să fie inclus în mulţimea $I \times \Omega$ ($\Delta_t \subset I \times \Omega$).

Mulţimea Γ definită prin $\Gamma = \{(t, X(t; t_0, X^0)) : t \in I_*\}$ este compactă şi este inclusă în mulţimea $\bigcup\limits_{t \in I_*} \overset{\circ}{\Delta}_t; \Gamma \subset \bigcup\limits_{t \in I_*} \overset{\circ}{\Delta}_t$. Există, prin urmare, un număr finit de puncte $t_1, t_2, \ldots, t_q$ în I_*, astfel ca $\Gamma \subset \bigcup\limits_{j=1}^{q} \overset{\circ}{\Delta}_{tj}$.

Considerăm funcţia $d(Y, Z) = \|Y - Z\|$ definită pentru $Y \in \Gamma$ şi Z de pe frontiera mulţimii $\bigcup\limits_{j=1}^{q} \Delta_{t_j}$; $Z \in \partial(\bigcup\limits_{j=1}^{q} \Delta_{t_j})$.

Există $r > 0$, astfel ca $d(Y, Z) > r$, pentru orice $Y \in \Gamma$ şi $Z \in \partial(\bigcup\limits_{j=1}^{q} \Delta_{t_j})$. Tubul de securitate Δ, definit prin:

$$\Delta = \{(t, X) : t \in I_* \ \text{ şi } \ \|X - X(t; t_0, X^0)\| \leq r\}$$

verifică următoarele incluziuni:

$$\Delta \subset \bigcup_{j=1}^{q} \overset{\circ}{\Delta}_{t_j} \subset I \times \Omega$$

şi există $K > 0$, astfel ca, pentru orice $(t, X^1), (t, X^2) \in \Delta$ să avem:

$$\|F(t, X^1) - F(t, X^2)\| \leq K \cdot \|X^1 - X^2\|$$

(o funcţie local Lipschitziană este global Lipschitziană pe compacte).

Notăm cu $h = \max\{T_2 - t_0, t_0 - T_1\}$ şi considerăm ε, $0 < \varepsilon < r$. Fie $\delta = \delta(\varepsilon, I_*) = \varepsilon \cdot 2^{-1} \cdot e^{-Kh}$ şi X^1, astfel ca $\|X^1 - X^0\| < \delta$. Notăm cu

I_1 intervalul de definiţie a soluţiei saturate $X = X(t; t_0, X^1)$ a problemei Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(t, X) \\ \\ X(t_0) = X^1 \ . \end{cases}$$

Vom arăta acum că:

$$\|X(t; t_0, X^1) - X(t; t_0, X^0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru orice $t \in I_* \cap I_1$.

Raţionăm prin reducere la absurd şi admitem că există $t_1 \in I_* \cap I_1$ astfel ca $\|X(t_1; t_0, X^1) - X(t_1; t_0, X^0)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. De aici rezultă că, cel puţin pentru unul din numerele α_1, α_2, definite prin

$$\alpha_1 = \inf \left\{ t \in I_* \cap I_1 : \|X(\tau; t_0, X^1) - X(\tau; t_0, X^0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \ (\forall) \ \tau \in [t, t_0] \right\},$$

$$\alpha_2 = \sup \left\{ t \in I_* \cap I_1 : \|X(\tau; t_0, X^1) - X(\tau; t_0, X^0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \ (\forall) \ \tau \in [t_0, t] \right\},$$

are loc egalitatea

$$\|X(\alpha_i; t_0, X^1) - X(\alpha_i; t_0, X^0)\| = \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Să presupunem de exemplu că $\|X(\alpha_2; t_0, X^1) - X(\alpha_2; t_0, X^0)\| = \frac{\varepsilon}{2}$.

Pe de altă parte, pentru orice $t \in [t_0, \alpha_2]$ avem:

$$\|X(t; t_0, X^1) - X(t; t_0, X^0)\| \leq \|X^1 - X^0\| +$$

$$+ K \cdot \int_{t_0}^{t} \|X(\tau; t_0, X^1) - X(\tau; t_0, X^0)\| d\tau \leq \|X^1 - X^0\| \cdot e^{K \cdot h} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ceea ce constituie o contradicţie şi prin urmare:

$$\|X(t; t_0, X^1) - X(t; t_0, X^0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru orice $t \in I_* \cap I_1$.

Vom arăta în continuare că $\alpha = \inf I_1 \leq T_1$ şi că $\beta = \sup I_1 \geq T_2$.

Din nou raţionăm prin reducere la absurd şi admitem de exemplu că $\beta < T_2$. Pentru orice $t \in [t_0, \beta)$ avem inegalităţile:

$$\|X(t;t_0,X^1) - X(t;t_0,X^0)\| \leq \|X^1 - X^0\| +$$

$$+K \cdot \int_{t_0}^{t} \|X(\tau;t_0,X^1) - X(\tau;t_0,X^0)\| d\tau \leq \|X^1 - X^0\| \cdot e^{K \cdot h} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

În plus, pentru orice t', t'' cu $t_0 < t' < t'' < \beta$ avem inegalitatea:

$$\|X(t';t_0,X^1) - X(t'';t_0,X^1)\| \leq M \cdot |t'' - t'|,$$

unde $M = \sup\limits_{(t,X)\in\Delta} \|F(t,X)\|$.

Acestea demonstrează că există limita:

$$\lambda = \lim_{t\to\beta} X(t;t_0,X^1)$$

şi $(\beta, \lambda) \in \Delta$. Contradicţie.

Inegalităţile stabilite sunt valabile deci pe întreg intervalul I_* şi astfel teorema este demonstrată.

Teorema 4.3.8 *(de dependenţă continuă de condiţia iniţială (t_0, X^0))* *Pentru orice interval compact $I_* = [T_1, T_2]$, inclus în intervalul I_0 ($I_* \subset I_0$), care conţine punctul t_0 în interior ($t_0 \in \overset{\circ}{I_*}$) şi pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon, I_*)$, astfel ca, pentru orice condiţie iniţială (t_1, X^1) cu $|t_1 - t_0| < \delta$ şi $\|X^1 - X^0\| < \delta$, soluţia saturată*
$X^1 = X^1(t;t_1,X^1)$ a problemei Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X} = F(t,X) \\ X(t_0) = X^1 \end{cases}$$

este definită cel puţin pe intervalul I_* şi verifică inegalitatea:

$$\|X(t;t_1,X^1) - X(t;t_0,X^0)\| < \varepsilon, \ (\forall)\ t \in I_*.$$

Demonstraţie: Fie $r > 0$ şi $K > 0$, astfel ca tubul Δ, definit prin

$$\Delta = \{(t, X) : t \in I_*, \quad \|X - X(t; t_0, X^0)\| \leq r\}$$

să fie inclus în mulţimea $I \times \Omega$ $(\Delta \subset I \times \Omega)$ şi pentru orice $(t, X^1), (t, X^2) \in \Delta$ să avem

$$\|F(t, X^1) - F(t, X^2)\| \leq K \cdot \|X^1 - X^2\|.$$

Considerăm numerele:

$$h_1 = \min\{T_2 - t_0, t_0 - T_1\}; \quad h_2 = \max\{T_2 - t_0, t_0 - T_1\};$$

$$M = \sup_{(t,X)\in\Delta} \|F(t, X)\|;$$

un număr ε, $0 < \varepsilon < r$ şi numărul $\delta = \delta(\varepsilon, I_*)$, definit astfel:

$$\delta = 2^{-1} \cdot \min\{h_1, \varepsilon \cdot (M + 1)^{-1} \cdot e^{-K(h_1+h_2)}\}$$

Pentru (t_1, X^1) cu $|t_1 - t_0| < \delta$ şi $\|X^1 - X^0\| < \delta$ avem inegalităţile:

$$T_1 < t_1 < T_2 \quad ,$$

$$\begin{aligned} \|X^1 - X(t_1; t_0, X^0)\| &\leq \|X^1 - X^0\| + \|X^0 - X(t_1; t_0, X^0)\| < \\ &< \delta \cdot (M + 1) < \frac{\varepsilon}{2} < r; \end{aligned}$$

şi prin urmare $(t_1, X^1) \in \Delta \subset I \times \Omega$.

Fie $X^1 = X(t; t_1, X^1)$ soluţia maximală a problemei Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(t, X) \\ X(t_0) = X^1 \end{cases}$$

definită pe intervalul I_1.

Vom arăta că $\|X(t; t_1, X^1) - X(t; t_0, X^0)\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $t \in I_* \cap I_1$.

Raţionăm prin reducere la absurd şi admitem că există $t_2 \in I_* \cap I_1$, astfel ca $\|X(t_2; t_1, X^1) - X(t_2, t_0, X^0)\| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Rezultă de aici că cel puţin pentru unul din numerele α_1, α_2 definite prin

$$\alpha_1 = \inf\left\{t \in I_* \cap I_1 : \|X(\tau; t_0, X^1) - X(\tau; t_0, X^0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \ (\forall)\ \tau \in [t, t_1]\right\}$$

$$\alpha_2 = \sup\left\{t \in I_* \cap I_1 : \|X(\tau; t_0, X^1) - X(\tau; t_0, X^0)\| < \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ \tau \in [t_1, t]\right\}$$

se realizează egalitatea:

$$\|X(\alpha_i; t_1, X^1) - X(\alpha_i; t_0, X^0)\| = \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Să presupunem, de exemplu, că avem:

$$\|X(\alpha_2; t_1, X^1) - X(\alpha_2; t_0, X^0)\| = \frac{\varepsilon}{2}$$

Pe de altă parte, pentru orice $t \in [t_1, \alpha_2]$ avem inegalităţile:

$$\|X(t; t_1, X^1) - X(t; t_0, X^0)\| \leq$$

$$\leq \|X^1 - X(t_1; t_0, X^0)\| + K \int_{t_1}^{t} \|X(\tau; t_1, X^1) - X(\tau; t_0, X^0)\| d\tau \leq$$

$$\leq \|X^1 - X(t_1; t_0, X^0)\| \cdot e^{K(h_1+h_2)} < (M+1) \cdot \delta \cdot e^{K(h_1+h_2)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Contradicţie.

Prin urmare, $\|X(t; t_1, X^1) - X(t; t_0, X^0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $(\forall)$ $t \in I_* \cap I_1$.

Vom arăta în continuare că $\alpha = \inf\ I_1 \leq T_1$ şi $\beta = \sup\ I_1 \geq T_2$.

Raţionăm prin reducere la absurd şi presupunem de exemplu că $\beta < T_2$. Pentru orice $t \in [t_1, \beta)$ avem inegalitatea:

$$\|X(t; t_1, X^1) - X(t; t_0, X^0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi pentru orice $t', t'' \in [t_1, \beta)$:

$$\|X(t'; t_1, X^1) - X(t''; t_1, X^1)\| \leq M \cdot |t' - t''|$$

Aceasta arată că există limita $\lambda = \lim_{t \to \beta} X(t; t_1, X^1)$ şi $(\beta, \lambda) \in I \times \Omega$.

Contradicţie.

Inegalităţile stabilite sunt valabile pe I_* şi astfel teorema este demonstrată.

Fie $I \subset I\!R^1$ un interval deschis, $D \subset I\!R^n$ un domeniu, $\Omega \subset I\!R^m$ un domeniu, $F : I \times D \times \Omega \to I\!R^n$ o funcţie vectorială şi sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu parametru scris sub forma matriceală:

$$\dot{X} = F(t, X, \mu) \qquad t \in I,\ X \in D,\ \mu \in \Omega. \tag{4.10}$$

Considerăm un punct $(t_0, X^0, \mu^0) \in I \times D \times \Omega$ şi problema Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(t, X, \mu^0) \\ \\ X(t_0) = X^0 \end{cases} \tag{4.11}$$

Presupunem că funcţia F este de clasă $\mathcal{C}^1$ în raport cu (t, X) şi este continuă în raport cu parametrul μ şi considerăm soluţia saturată $X(t; t_0, X^0, \mu^0)$ a problemei Cauchy (4.11) definită pe intervalul I_0.

Teorema 4.3.9 *(de dependenţă continuă de parametru)*
Pentru orice interval compact $I_* = [T_1, T_2] \subset I_0$, care conţine punctul t_0 în interior ($t_0 \in \overset{\circ}{I_*}$) şi pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(\varepsilon, I_*) > 0$, astfel încât, dacă $\|\mu - \mu^0\| < \delta$, atunci soluţia saturată $X = X(t; t_0, X^0, \mu)$ a problemei Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X} = F(t, X, \mu) \\ \\ X(t_0) = X^0 \end{cases}$$

este definită pe intervalul I_* şi verifică inegalitatea:

$$\|X(t; t_0, X^0, \mu) - X(t; t_0, X^0, \mu^0)\| < \varepsilon$$

pentru orice $t \in I_*$.

Demonstraţie: Fie $r_1 > 0$ şi $r_2 > 0$ astfel ca mulţimea Δ şi $\overline{S}$ definite prin:

$\Delta = \{(t, X) : t \in I_*, ||X - X(t; t_0, X^0, \mu^0)|| \leq r_1\}$

$\overline{S} = \overline{S}(\mu^0, r_2) = \{\mu : ||\mu - \mu^0|| \leq r_2\}$
să verifice $\Delta \subset I \times \Omega$, respectiv $\overline{S} \subset \Omega_1$.

Există $K > 0$ astfel încât să avem:

$$||F(t, X^1, \mu) - F(t, X^2, \mu)|| \leq K \cdot ||X^1 - X^2||,\ (\forall)(t, X^1, \mu), (t, X^2, \mu) \in \Delta \times \overline{S}$$

Notăm $h = \max\{T_2 - t_0, t_0 - T_1\}$ şi considerăm un număr ε, cu proprietatea $0 < \varepsilon < r$. Fie $\delta = \delta(\varepsilon, I_*)$ astfel ca pentru $0 < \delta < r_2$ şi $||\mu - \mu^0|| < \delta$ să avem:

$$||F(t, X, \mu) - F(t, X, \mu_0)|| < \varepsilon \cdot 2^{-1} \cdot e^{-Kh}\ , \quad (\forall)\ (t, X) \in \Delta.$$

Pentru μ cu proprietatea $||\mu - \mu^0|| < \delta$ considerăm soluţia saturată $X = X(t; t_0, X^0, \mu)$ a problemei Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X} = F(t, X, \mu) \\ X(t_0) = X^0 \end{cases}$$

definită pe intervalul I_μ.

Vom arăta că:

$$||X(t; t_0, X^0, \mu) - X(t; t_0, X^0, \mu^0|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru orice $t \in I_* \cap I_\mu$.

Raţionăm prin reducere la absurd şi admitem că există $t_1 \in I_* \cap I_\mu$ astfel ca

$$||X(t_1; t_0, X^0, \mu) - X(t_1; t_0, X^0, \mu^0)|| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rezultă de aici că, cel puţin pentru unul dintre numerele α_1, α_2 definite prin:

$$\alpha_1 = \inf \left\{ t \in I_* \cap I_\mu : ||X(\tau; t_0, X^0, \mu) - X(\tau; t_0, X^0, \mu^0)|| < \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\tau \in [t, t_0] \right\}$$

$$\alpha_2 = \sup \left\{ t \in I_* \cap I_\mu : ||X(\tau; t_0, X^0, \mu) - X(\tau; t_0, X^0, \mu^0)|| < \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\tau \in [t, t_0] \right\}$$

are loc egalitatea:

$$||X(\alpha_i; t_0, X^0, \mu) - X(\alpha_i; t_0, X^0, \mu^0)|| = \frac{\varepsilon}{2}\ , \quad i = 1, 2.$$

Să admitem de exemplu că avem:

$$||X(\alpha_2; t_0, X^0, \mu) - X(\alpha_2; t_0, X^0, \mu^0)|| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pe de altă parte, pentru orice $t \in [t_0, \alpha_2]$ au loc inegalităţile:

$$\begin{aligned}
&||X(t;t_0,X^0,\mu)-X(t;t_0,X^0,\mu^0)|| \leq \\
&\leq \int_{t_0}^{t} ||F(\tau,X(\tau;t_0,X^0,\mu),\mu)-F(\tau,X(\tau;t_0,X^0,\mu^0),\mu^0)||d\tau \leq \\
&\leq \int_{t_0}^{t} ||F(\tau,X(\tau;t_0,X^0,\mu),\mu)-F(\tau,X(\tau;t_0,X^0,\mu^0),\mu)||d\tau \leq \\
&\leq \int_{t_0}^{t} ||F(\tau,X(\tau;t_0,X^0,\mu^0),\mu)-F(\tau,X(\tau;t_0,X^0,\mu^0),\mu^0)||d\tau \leq \\
&\leq K\cdot\int_{t_0}^{t} ||X(\tau;t_0X^0,\mu)-X(\tau;t_0,X^0,\mu^0)||d\tau+\varepsilon\cdot 2^{-1}\cdot e^{-K\cdot h} \leq \\
&\leq \varepsilon\cdot 2^{-1}\cdot e^{-K\cdot h}\cdot e^{K(t-t_0)} < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Contradicţie.

Prin urmare:

$$||X(t;t_0,X^0,\mu)-X(t;t_0,X^0,\mu^0)|| < \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)t\in I_*\cap I_\mu.$$

Vom arăta în continuare că $\alpha = \inf I_\mu \leq T_1$ şi $\beta = \sup I_\mu \geq T_2$. Raţionăm prin reducere la absurd presupunând de exemplu $\beta < T_2$.

Pentru orice $t \in [t_0, \beta)$ are loc inegalitatea:

$$||X(t;t_0,X^0,\mu)-X(t;t_0,X^0,\mu^0)|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi pentru $t', t'' \in [t_0, \beta]$ avem:

$$||X(t';t_0,X^0,\mu)-X(t'';t_0,X^0,\mu)|| < M\cdot|t'-t''|$$

cu

$$M = \sup_{\Delta\times\overline{S}} ||F(t,X,\mu)||$$

Rezultă de aici că există limita $\lambda = \lim_{t \to \beta} X(t; t_0, X^0, \mu)$ şi $(\beta, \lambda) \in I \times \Omega$. Contradicţie.

Calculele făcute sunt valabile pe intervalul I_* şi astfel teorema este demonstrată.

Consecinţa 4.3.3 *Dacă funcţia $F = F(t, X, \mu)$ este liniară în raport cu $X \in I\!R^n$, atunci pentru orice interval I_* $(I_* \subset I)$ care conţine punctul t_0 în interior $(\mathring{I}_* \ni t_0)$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon, I_*) > 0$ astfel încât dacă $||\mu - \mu^0|| < \delta$, avem:*

$$||X(t; t_0, X^0, \mu) - X(t; t_0, X^0, \mu^0)|| < \varepsilon$$

pentru orice $t \in I_*$.

Demonstraţie: Cu teorema lui Banach-Steinhaus se obţine că funcţia $||F(t, \cdot, \mu)||$ este mărginită pe compacte şi

$$\lim_{\mu \to \mu_0} F(t, X, \mu) = F(t, X, \mu^0).$$

Teorema 4.3.10 *(de diferenţiabilitate în raport cu condiţiile iniţiale) În condiţiile Teoremei 4.3.7, funcţia $(t, t_1, X^1) \to X(t; t_1, X^1)$ este diferenţiabilă în raport cu t_1, X^1 şi au loc următoarele egalităţi:*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\partial_{X^1} X(t; t_0, X^0)\right) &= \partial_X F(t, X(t; t_0, X^0)) \cdot \partial_{X^1} X(t; t_0, X^0) \\
\partial_{X^1} X(t_0; t_0, X^0) &= I \\
\frac{d}{dt}\left(\partial_{t_1} X(t; t_0, X^0)\right) &= \partial_X F(t, X(t; t_0, X^0)) \cdot \partial_{t_1} X(t; t_0, X^0) \\
\partial_{t_1} X(t_0; t_0, X^0) &= -F(t_0, X^0) \\
\partial_{t_1} X(t; t_0, X^0) &= -\partial_{X^1} X(t; t_0, X^0) \cdot F(t_0, X^0)
\end{aligned}$$

Demonstraţie: Pentru $t \in I_\delta$, $X^1 \in S(X^0, \delta/2)$, $h \in S(0, \delta/2)$ şi $Y \in I\!R^n$ considerăm funcţia:

$$H(t, t_0, X^1, h, Y) =$$
$$= \left\{ \int_0^1 \partial_X F(t, X(t; t_0, X^1) + s \cdot [X(t; t_0, X^1 + h) - X(t; t_0, X^1)])ds \right\} \cdot Y$$

Funcţia H definită în acest mod este continuă în raport cu t şi este liniară în raport cu Y. În plus funcţia H este continuă în raport cu (t, h).
Fie $e^1, e^2, \ldots, e^n$ baza canonică din $\mathbf{R}^n$ şi $\xi \in \mathbf{R}$ astfel ca $|\xi| < \delta/2$.

Problemele Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{Y}^k_\xi = H(t, t_0, X^1, \xi \cdot e^k, Y^k_\xi) \\ Y^k_\xi(t_0) = e^k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Y}^k_\xi = H(t, t_0, X^1, 0, Y^k) \\ Y^k(t_0) = e^k \end{cases}$$

au soluţii definite pe intervalul I_δ pentru $k = 1, 2, \ldots, n$. În plus pentru orice interval compact $I_* \subset I_\delta$ avem $\lim_{\xi \to 0} Y^k_\xi(t) = Y^k(t)$ uniform în raport cu $t \in I_*$.

Pe de altă parte pentru $\xi \neq 0$ avem:

$$Y^k_\xi(t) = \frac{1}{\xi}[X(t; t_0, X^1 + \xi \cdot e^k) - X(t; t_0, X^1)]$$

pentru orice $t \in I_\delta$.

Prin urmare, există limita

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{1}{\xi}[X(t; t_0, X^1 + \xi \cdot e^k) - X(t; t_0, X^1)]$$

şi este egală cu $Y^k(t)$ pentru $t \in I_\delta$.

Aceasta demonstrează că funcţia $X(t; t_0, X^1)$ are derivate parţiale în raport

cu X^1 în punctele (t,t_0,X^1) şi în plus avem:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X}{\partial x_k^1}(t,t_0,X^1)\right) &= H\left(t,t_0,X^1,0,\frac{\partial X}{\partial x_k^1}(t,t_0,X^1)\right)\\ \frac{\partial X}{\partial x_k^1}(t_0,t_0,X^1) &= e^k\end{aligned}$$

Funcţia $H(t,t_0,X^1,0,Y)$ fiind continuă în raport cu (t,X^1) şi liniară în raport cu Y rezultă că soluţia problemei Cauchy precedente $\dfrac{\partial X}{\partial x_k^1}(t,t_0,X^1)$ converge la soluţia problemei Cauchy:

$$\begin{cases}\dfrac{dY^k}{dt} = H(t,t_0,X^0,0,Y^k)\\ Y^k(t_0) = e^k\end{cases}$$

pentru $X^1 \to X^0$ uniform, pe intervale compacte $I_1 \subset I_\delta$.

Aceasta implică că derivatele parţiale ale funcţiei $X(t;t_0,X^1)$ în raport cu X^1 sunt funcţii continue în raport cu X^1 în punctele (t,t_0,X^0). Deci funcţia $X(t;t_1,X^1)$ este diferenţiabilă în raport cu X^1 în punctele (t,t_0,X^0) şi satisfac:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\partial_{X^1}X(t;t_0,X^0)\right) &= \partial_X F\left(t,X(t;t_0,X^0)\right)\cdot\partial_{X^1}X(t;t_0,X^0)\\ \partial_{X^1}X(t_0;t_0,X^0) &= I.\end{aligned}$$

Fie acum $\tau \in I\!R^1$ astfel ca $0<|\tau|<\delta$ şi apoi funcţia

$$X_\tau(t) = \frac{1}{\tau}\cdot\left[X(t;t_0+\tau,X^0) - X(t;t_0,X^0)\right] \text{ pentru } t \in I_\delta.$$

Avem egalităţile:

$$\begin{aligned}
\tau \cdot X_\tau(t) &= X(t;t_0+\tau,X^0) - X(t;t_0,X^0) = \\
&= X(t;t_0,X(t_0;t_0+\tau,X^0)) - X(t;t_0,X^0) = \\
&= \partial_{X^1}X(t;t_0,X^0)\cdot[X(t_0;t_0+\tau,X^0)-X^0]+ \\
&\quad +O(||X(t_0;t_0+\tau,X^0)-X^0||) = \\
&= \partial_{X^1}X(t;t_0,X^0)\cdot[X(t_0;t_0+\tau,X^0)-X(t_0+\tau;t_0+\tau,X^0)]+ \\
&\quad +O(||X(t_0;t_0+\tau,X^0)-X^0||) = \\
&= -\tau\partial_{X^1}X(t;t_0,X^0)\sum_{k=1}^{n}F_k(t_0+\theta_k\tau,X(t_0+\theta_k\tau;t_0+\tau,X^0)\cdot e^k+ \\
&\quad +O(||X(t_0;t_0+\tau,X^0)-X^0||)
\end{aligned}$$

cu $0<\theta_k<1$ pentru $k=\overline{1,n}$.

Astfel,

$$X_\tau(t) = -\partial_{X^1}X(t;t_0,X^0)(\sum_{k=1}^{n}F_k(t_0+\theta_k\cdot\tau,X(t_0+\theta_k\tau;t_0+\tau,X^0))e^k)+$$

$$+\frac{O(||X(t_0;t_0+\tau,X^0)-X^0||)}{||X(t_0;t_0+\tau,X^0)-X^0||}\cdot\frac{||X(t_0;t_0+\tau,X^0)-X(t_0+\tau;t_0+\tau,X^0)||}{\tau}.$$

Deoarece raportul $\frac{1}{\tau}\cdot||X(t_0;t_0+\tau,X^0)-X(t_0+\tau,t_0+\tau,X^0)||$ este mărginit pentru $\tau\to 0$ şi $||X(t_0;t_0+\tau,X^0)-X^0||\to 0$ pentru $\tau\to 0$ uniform pe orice interval compact $I_*\subset I_\delta(I_*\ni t_0)$ rezultă că

$$\lim_{\tau\to 0}X_\tau(t) = -\partial_{X^1}X(t;t_0,X^0)\cdot F(t_0,X^0)$$

şi deci funcţia $X(t;t_1,X^1)$ este deiferenţiabilă în raport cu t_1 în $(t;t_0,X^0)$. În plus,

$$\partial_{t_1}X(t;t_0,X^0) = -\partial_{X^1}X(t;t_0,X^0)\cdot F(t_0,X^0).$$

Derivabilitatea în raport cu t a funcţiei $\partial_{t_1} X(t; t_0, X^0)$ este o consecinţă a acestei egalităţi.

În plus avem egalităţile:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\left(\partial_{t_1} X(t; t_0, X^0)\right) = \\
= \quad & -\frac{d}{dt}\left(\partial_{X^1} X(t; t_0, X^0)\right) F(t_0, X^0) = \\
= \quad & -\partial_X F(t, X(t; t_0, X^0)) \cdot (\partial_{X^1} X(t; t_0, X^0)) \cdot F(t_0, X^0) = \\
= \quad & \partial_X F\,(t, X(t; t_0, X^0)) \cdot \partial_{t_1} X(t; t_0, X^0) \\
& \partial_{t_1} X(t_0; t_0, X^0) = -F(t_0, X^0).
\end{aligned}$$

În acest fel teorema de diferenţiabilitate în raport cu condiţiile iniţiale este complet demonstrată.

Teorema 4.3.11 *(de diferenţiabilitate în raport cu parametru).*
Dacă funcţia $F = F(t, X, \mu)$ satisface condiţiile din Teorema 4.3.9 şi în plus este de clasă C^1 în raport cu μ, atunci funcţia

$$(t; t_0, X^0, \mu) \to X(t; t_0, X^0, \mu)$$

este diferenţiabilă în raport cu μ şi au loc următoarele egalităţi:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\partial_\mu X(t;t_0,X^0,\mu^0)) \quad &= \quad \partial_X F(t, X(t; t_0, X^0, \mu^0), \mu^0) \cdot \partial_\mu X(t; t_0, X^0, \mu^0) + \\
&+ \quad \partial_\mu F(t; X(t; t_0, X^0, \mu^0), \mu^0) \\
& \quad\quad \partial_\mu X(t_0; t_0, X^0, \mu^0) = 0.
\end{aligned}$$

Demonstraţie: Fie $e^1, e^2, ..., e^m$ baza canonică în spaţiul $I\!R^m$.
Pentru $t \in I_\delta$, $\mu^1 \in S(\mu^0, \frac{\delta}{2})$, $h \in I\!R^1$, $|h| < \frac{\delta}{2}$, $Y \in I\!R^n$ şi $k = \overline{1, m}$

definim funcţia $H_k = H_k(t, t_0, X^0, \mu^1, h, Y)$ cu formula:

$$H_k(t, t_0, X^0, \mu^1, h, Y) =$$
$$= \left\{ \int_0^1 \partial_X F(t, X(t; t_0, X^0, \mu^1) + s\left[X(t; t_0, X^0, \mu^1 + h \cdot e^k) - X(t; t_0, X^0, \mu^1)\right], \right.$$
$$\left. \mu^1 + h \cdot e^k) ds \right\} Y + \left[\int_0^1 \partial_\mu F(t, X(t; t_0, X^0, \mu^1), \mu^1 + s \cdot h \cdot e^k) ds \right] \cdot e^k.$$

Funcţia H_k este continuă în raport cu $t \in I_\delta$, lipschitziană în raport cu Y pe intervale compacte $I_* \subset I$. În plus, funcţia $H_k(t, t_0, X^0, \mu^1, h, Y)$ tinde la $H_k(t, t_0, X^0, \mu^1, 0, Y)$ pentru $h \to 0$ uniform pe compacte în raport cu (t, Y).

Problemele Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dY_\xi^k}{dt} = H_k(t, t_0, X^0, \mu^1, Y_h^k) \\ Y_h^k(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dY^k}{dt} = H_k(t, t_0, X^0, \mu^1, Y^k) \\ Y^k(t_0) = 0 \end{cases}$$

au soluţii definite pe I_δ şi $\lim\limits_{h \to 0} Y_h^k(t) = Y^k(t)$ uniform în raport cu t pe orice interval $J \subset I$.
Pe de altă parte se verifică uşor că pentru $h \neq 0$ avem:

$$Y_h^k(t) = \frac{1}{h}[X(t; t_0, X^0, \mu^1 + h \cdot e^k) - X(t; t_0, X^0, \mu^1)]$$

şi deducem că funcţia $X(t; t_0, X^0, \mu)$ are derivate parţiale în raport cu μ_k în (t, t_0, X^0, μ^1) şi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X}{\partial \mu_k}(t, t_0, X^0, \mu^1)\right) &= H_k\left(t, t_0, X^0, \mu^1, 0, \frac{\partial X}{\partial \mu_k}(t, t_0, X^0, \mu^1)\right) \\ \frac{\partial X}{\partial \mu_k}(t_0, t_0, X^0, \mu^1) &= 0 \end{aligned}$$

Pe de altă parte:

$$\lim_{\mu^1 \to \mu^0} H^k(t, t_0, X^0, \mu^1, 0, Y) = H^k(t, t_0, X^0, \mu^0, 0, Y)$$

uniform în raport cu (t, Y) pe mulţimi compacte.

Deci $\frac{\partial X}{\partial \mu_k}(t, t_0, X^0, \mu^1)$ tinde la $\frac{\partial X}{\partial \mu_k}\left(t, t_0, X^0, \mu^0\right)$ pentru $\mu \to \mu^0$ uniform pe orice interval compact $I_* \subset I$.

Aceasta demonstrază că derivatele parţiale în raport cu μ_k ale funcţiei $X(t; t_0, X^0, \mu)$ sunt continue în raport cu μ în $(t; t_0, X^0, \mu^0)$.

În plus, avem:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial X}{\partial \mu_k}(t, t_0, X^0, \mu^0)\right) =$$

$$= \partial_X F\left(t, X(t; t_0, X^0, \mu^0), \mu^0\right) \cdot \frac{\partial X}{\partial \mu_k}\left(t; t_0, X^0, \mu^0\right) + \frac{\partial F}{\partial \mu_K}\left(t, X(t; t_0, X^0, \mu^0), \mu^0\right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \mu_k}\left(t_0; t_0, X^0, \mu^0\right) = 0$$

Prin urmare funcţia $X = X(t; t_0, X^0, \mu)$ este diferenţiabilă în raport cu μ în punctul (t, t_0, X^0, μ^0) şi pentru orice $t \in I_\delta$ avem:

$$\frac{d}{dt}\left(\partial_\mu X(t; t_0, X^0, \mu^0)\right) =$$

$$\partial_X F(t, X(t; t_0, X^0, \mu^0), \mu^0) \cdot \partial_\mu X(t; t_0, X^0, \mu^0) + \partial_\mu F(t, X(t; t_0, X^0, \mu^0), \mu^0)$$

$$\partial_\mu X(t_0; t_0, X^0, \mu^0) = 0.$$

4.4 Metode numerice

4.4.1 Metoda liniilor poligonale a lui Euler de determinare numerică locală a unei soluţii neprelungibile în cazul sistemelor diferenţiale de ordinul întâi

Fie I un interval real deschis şi nevid $I \subset I\!R^1$, D un domeniu nevid în spaţiul $I\!R^n$, $D \subset I\!R^n$ şi F o funcţie de clasă C^1, $F : I \times D \to I\!R^n$.
Pentru $(t_0, X^0) \in I \times D$ considerăm soluţia neprelungibilă $X = X(t; t_0, X^0)$ a problemei cu date iniţiale

$$\dot{X} = F(t, X); \qquad X(t_0) = X^0 \tag{4.12}$$

şi notăm cu $I_0 = (\alpha_0, \beta_0) \subset I$ intervalul de definiţie al acestei soluţii.

O primă metodă de determinare numerică locală a soluţiei neprelungibile $X = X(t; t_0, X^0)$ este cea a liniilor poligonale a lui Euler. În cele ce urmează vom prezenta această metodă.

Considerăm două constante pozitive a şi b, $a > 0, b > 0$ astfel ca cilindrul

$$\Delta = \{(t, X) |\ |t - t_0| \le a \quad \text{şi} \quad \|X - X^0\| \le b\}$$

să fie inclus în domeniul $\Omega = I \times D$; $\Delta \subset I \times D$.

Notăm cu M maximul funcţiei F pe cilindrul compact Δ :

$$M = \max_{(t,X)\in\Delta} \|F(t, X)\|$$

cu α numărul pozitiv $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$ şi cu I_α intervalul

$$I_\alpha = [t_0 - \alpha,\ t_0 + \alpha].$$

Considerăm un număr real şi pozitiv $\varepsilon > 0$ şi alegem $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel ca pentru orice $(t', X'), (t'', X'') \in \Delta$ care verifică inegalităţile:

$$|t' - t''| < \delta(\varepsilon) \quad \text{şi} \quad \|X' - X''\| < \delta(\varepsilon)$$

să avem $\|F(T', X') - F(t'', X'')\| < \varepsilon$.

Funcţia $F = F(t, X)$ este uniform continuă pe cilindrul compact Δ şi, de aceea, pentru orice $\varepsilon > 0$, alegerea unui $\delta(\varepsilon) > 0$ cu proprietatea menţionată este posibilă.

Considerăm acum un număr pozitiv $h > 0$ pe care-l vom numi pas şi pe care îl alegem astfel încât să satisfacă inegalitatea $0 < h < \dfrac{\delta}{M}$. Fie q numărul natural cu proprietatea:

$$t_q = t_0 + q \cdot h \leq t_0 + \alpha \quad \text{şi} \quad t_{q+1} = t_0 + (q+1) \cdot h > t_0 + \alpha.$$

Pentru $i = \overline{1, q}$ considerăm numerele $t_i = t_0 + ih$ şi $t_{-i} = t_0 - ih$. Aceste numere definesc o diviziune a segmentului I_α.

$$t_0 - \alpha \leq t_{-q} < t_{-q+1} < \cdots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots < t_{q-1} < t_q \leq t_0 + \alpha.$$

Pe intervalul $[t_0, t_1]$ definim funcţia $X^1 = X^1(t)$ cu formula

$$X^1(t) = X^0 + (t - t_0) \cdot F(t_0, X^0)$$

iar pe intervalul $[t_{-1}, t_0]$ funcţia $X^{-1} = X^{-1}(t)$ dată de:

$$X^{-1}(t) = X^0 + (t - t_0) \cdot F(t_0, X^0).$$

Aceste funcţii verifică următoarele inegalităţi:

$$\|X^1(t) - X^0\| \leq b \quad \text{şi} \quad \|\dot{X}^1(t) - F(t, X^1(t))\| < \varepsilon, \qquad (\forall)\ t \in [t_0, t_1]$$

$$\|X^{-1}(t) - X^0\| \leq b \quad \text{şi} \quad \|\dot{X}^{-1}(t) - F(t, X^{-1}(t))\| < \varepsilon, \quad (\forall)\ t \in [t_1, t_0].$$

În continuare, pe intervalul $[t_1, t_2]$ definim funcţia $X^2 = X^2(t)$ cu formula

$$X^2(t) = X^1(t_1) + (t - t_1) \cdot F(t_1, X^1(t_1)).$$

şi pe intervalul $[t_{-2}, t_{-1}]$ funcţia $X^{-2} = X^{-2}(t)$ cu formula

$$X^{-2}(t) = X^{-1}(t_{-1}) + (t - t_1) \cdot F(t_{-1}, X^{-1}(t_{-1})).$$

Funcţiile $X^2(t)$ şi $X^{-2}(t)$ definite în acest fel verifică următoarele inegalităţi:

$$\|X^2(t) - X^0\| \leq b \quad \text{şi}\ \|\dot{X}^2(t) - F(t, X^2(t))\| < \varepsilon, \qquad (\forall)\ t \in [t_1, t_2]$$

$$\|X^{-2}(t) - X^0\| \leq b \quad \text{şi}\ \|\dot{X}^{-2}(t) - F(t, X^{-2}(t))\| < \varepsilon, \quad (\forall)\ t \in [t_{-2}, t_{-1}]$$

Să presupunem că în acest fel am ajuns să construim funcţiile $X^j = X^j(t)$, respectiv $X^{-j} = X^{-j}(t)$ definite pe intervalul $[t_{j-1}, t_j]$, respectiv $[t_{-j}, t_{-j+1}]$ pentru $j = \overline{1, j_0}$, $(j_0 \leq q-1)$ şi ele verifică inegalităţile:

$$\|X^j(t)-X^0\| \leq b \quad \text{şi } \|\dot{X}^j(t)-F(t, X^j(t))\| < \varepsilon, \quad (\forall)\ t \in [t_{j-1}, t_j]$$

$$\|X^{-j}(t)-X^0\| \leq b \quad \text{şi } \|\dot{X}^{-j}(t)-F(t, X^{-j}(t))\| < \varepsilon, \quad (\forall)\ t \in [t_{-j}, t_{-j+1}]$$

Definind în continuare funcţiile $X^{j_0+1}(t)$, respectiv $X^{-j_0-1}(t)$ pe intervalul $[t_{j_0}, t_{j_0+1}]$, respectiv $[t_{-j_0-1}, t_{-j_0}]$ cu formulele:

$$\begin{aligned} X^{j_0+1}(t) &= X^{j_0}(t_{j_0}) + (t - t_{j_0}) \cdot F(t_{j_0}, X^{j_0}(t_{j_0})) \\ X^{-j_0-1}(t) &= X^{-j_0}(t_{-j_0}) + (t - t_{-j_0}) \cdot F(t_{-j_0}, X^{-j_0}(t_{-j_0})) \end{aligned}$$

putem obţine uşor că acestea verifică inegalităţile:

$$\|X^{j_0+1}(t) - X^0\| \leq b \quad \text{şi} \quad \|\dot{X}^{j_0+1}(t) - F(t, X^{j_0+1}(t)\| < \varepsilon, \quad (\forall)\ t \in [t_{j_0}, t_{j_0+1}]$$

$$\|X^{-j_0-1}(t) - X^0\| \leq b \quad \text{şi} \quad \|\dot{X}^{-j_0-1}(t) - F(t, X^{-j_0-1}(t)\| < \varepsilon, \quad (\forall)\ t \in [t_{-j_0-1}, t_{-j_0}].$$

Se obţine în acest fel că pentru orice $i = \overline{1, q}$, formulele:

$$X^i(t) = X^{i-1}(t_{i-1}) + (t - t_{i-1}) \cdot F(t_{i-1}, X^{i-1}(t_{i-1})), \quad (\forall) t \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$X^{-i}(t) = X^{-i+1}(t_{-i+1}) + (t - t_{-i+1}) \cdot F(t_{-i+1}, X^{-i+1}(t_{-i+1})), \quad (\forall) t \in [t_{-i}, t_{-i+1}]$$

definesc funcţii care verifică inegalităţile:

$$\|X^i(t)-X^0\| \leq b \quad \text{şi } \|\dot{X}^i(t)-F(t, X^i(t))\| < \varepsilon, \quad (\forall)\ t \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$\|X^{-i}(t)-X^0\| \leq b \quad \text{şi } \|\dot{X}^{-i}(t)-F(t, X^{-i}(t))\| < \varepsilon, \quad (\forall)\ t \in [t_{-i}, t_{-i+1}]$$

Considerăm acum funcţia $X^\varepsilon(t)$ definită pentru $t \in I_\alpha$ în modul următor: $X^\varepsilon(t) = X^i(t)$ dacă $t \in [t_{i-1}, t_i]$

$X^\varepsilon(t) = X^{-i}(t) \quad \text{dacă} \quad t \in [t_{-i}, t_{-i+1}]$
$X^\varepsilon(t) = X^q(t_q) + (t - t_q) \cdot F(t_q, X^q(t_q)) \quad \text{dacă} \quad t \in [t_q, t_0 + \alpha]$
$X^\varepsilon(t) = X^{-q}(t_{-q}) + (t - t_{-q}) \cdot F(t_{-q}, X^{-q}(t_{-q})) \quad \text{dacă} \quad t \in [t_0 - \alpha, t_{-q}]$

Funcţia $X^\varepsilon(t)$ definită în acest fel este continuă pe intervalul I_α, este derivabilă pe acest interval cu excepţia eventuală a punctelor $\{t_i\}_{i=\overline{1,q}}$ şi $\{t_{-i}\}_{i=\overline{1,q}}$ şi verifică:

$$\|X^\varepsilon(t) - X^0\| \leq b \ \text{ şi } \ \|\dot{X}^\varepsilon(t) - F(t, X^\varepsilon(t))\| < \varepsilon, \quad t \in I_\alpha.$$

Dacă definim funcţia $\theta^\varepsilon(t)$ prin:

$$\theta^\varepsilon(t) = \dot{X}^\varepsilon(t) - F(t, X^\varepsilon(t)) \quad \text{pentru} \quad t \neq t_i, t_{-i} \quad i = \overline{1,q} \ \text{ şi}$$

$$\theta^\varepsilon(t) = 0 \qquad \text{pentru} \quad t = t_i \ \text{ sau } \ t_{-i} \quad i = \overline{1,q},$$

atunci avem:

$$X^\varepsilon(t) = X^0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X^\varepsilon_\tau))d\tau + \int_{t_0}^{t} \theta^\varepsilon(\tau)d\tau,$$

pentru orice $t \in I_\alpha$ cu $\|\theta^\varepsilon(t)\| < \varepsilon$ pentru orice $t \in I_\alpha$.

Inegalitatea $\|X^\varepsilon(t) - X^0\| \leq b$, adevărată pentru orice $t \in I_\alpha$, arată că $\|X^\varepsilon(t)\| \leq b + \|X^0\|$, $(\forall)$ $t \in I_\alpha$. Rezultă astfel că familia de funcţii $\{X^\varepsilon(t)\}_{\varepsilon > 0}$ este egal mărginită pe $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Egalitatea:

$$X^\varepsilon(t) = X^0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X^\varepsilon(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{t} \theta^\varepsilon(\tau)d\tau, \qquad (\forall)\ t \in I_\alpha$$

împreună cu inegalitatea:

$$\|\theta^\varepsilon(\tau)\| < \varepsilon. \ \ (\forall) \ \ \tau \in I_\alpha$$

implică:

$$\begin{aligned} \|X^\varepsilon(t_1) - X^\varepsilon(t_2)\| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|F(\tau, X^\varepsilon(\tau))\|d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \|\theta^\varepsilon(\tau)\|d\tau \leq \\ &\leq M|t_2 - t_1| + \varepsilon|t_2 - t_1| \leq (M + \varepsilon)|t_2 - t_1| \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează că funcţiile $X^\varepsilon(t)$ sunt echicontinue pe I_α.

Cu teorema lui Arzela-Ascoli rezultă că există un şir $\varepsilon_n \to 0$, astfel ca şirul $\{X^{\varepsilon_n}\}_{\varepsilon_n}$ să fie uniform convergent pe intervalul I_α la o funcţie continuă X pe intervalul I_α, şi aceasta satisface $\|X(t) - X^0\| \leq b$, pentru orice $t \in I_\alpha$.

Continuitatea uniformă a funcţiei F pe cilindrul Δ şi convergenţa uniformă a şirului de funcţii X^{ε_n} la funcţia X asigură convergenţa uniformă a şirului de funcţii $F(\tau, X^{\varepsilon_n}(\tau))$ la funcţia $F(\tau, X(\tau))$ pe intervalul I_α.

Trecem la limită în egalitatea:

$$X^{\varepsilon_n}(t) = X^0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X^{\varepsilon_n}(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{t} \theta^{\varepsilon_n}(\tau)d\tau$$

şi obţinem că funcţia $X(t)$ verifică

$$X(t) = X^0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, X(\tau))d\tau, \qquad (\forall)\ t \in I_\alpha.$$

Aceasta demonstrează că limita $X = X(t)$ este soluţia problemei cu date iniţiale

$$\dot{X} = F(t, X), \qquad X(t_0) = X^0.$$

Din teorema de unicitate rezultă că funcţia $X(t)$ coincide cu soluţia saturată $X(t; t_0, X_0)$ pe intervalul I_α:

$$X(t) = X(t; t_0, X^0), \qquad (\forall)\ \ t \in I_\alpha.$$

Se obţine în acest fel că funcţia $X^\varepsilon(t)$ aproximează soluţia neprelungibilă $X(t; t_0, X^0)$ pe intervalul I_α.

Valorile funcţiei $X^\varepsilon(t)$ în punctele t_i se obţin cu formula de recurenţă:

$$X^\varepsilon(t_i) = X^\varepsilon(t_{i-1}) + h \cdot F(t_{i-1}, X^\varepsilon(t_{i-1})), \quad i = \overline{1, q}$$

iar în punctele t_{-i} cu formula de recurenţă:

$$X^\varepsilon(t_{-i}) = X^\varepsilon(t_{-i+1}) - h \cdot F(t_{-i+1}, X^\varepsilon(t_{-i+1})), \quad i = \overline{1, q}$$

Aceste proceduri de trecere de la $(t_{i-1}, X^\varepsilon_{i-1})$ la (t_i, X^ε_i) ori de la $(t_{-i+1}, X^\varepsilon_{-i+1})$ la $(t_{-i}, X^\varepsilon_{-i})$ sunt uşor de programat.

Pentru exemplificare, utilizând procedura de iteraţie Euler:

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$X^{i+1} = X^i + h \cdot m_E \quad \text{cu} \quad m_E = F(t_i, X_i),$$

vom determina soluţia numerică pentru o ecuaţie diferenţială şi respectiv pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.
Astfel, vom considera ecuaţia liniară:

$$\dot{x} = -x + 2e^t \tag{4.13}$$

a cărei soluţie a fost deja determinată prin calcul simbolic în Capitolul 2:

$$x(t) = e^t + e^{-t}.$$

Programând în *Maple* şi utilizând procedura de iteraţie Euler se obţine:

```
> h:=0.1:  n:=10:
> f:=(t,x)->-x(t)+2*exp(t):
> t:=(n,h)->n*h:
> x:=proc(n,h);
> if n=0 then x(0) else
  x(n-1,h)+h*f(t(n-1,h),x(n-1,h)) end if;
> end proc:
> x(0):=2:
> x(t):=[seq(x(i,h),i=0..n)];
```

$$x(t) := [2, 2.0, 2.021034184, 2.063211317, 2.126861947,$$
$$2.212540692, 2.321030877, 2.453351549,$$
$$2.610766936, 2.794798428, 3.007239207]$$

```
> t:=[seq(t(i,h),i=0..n)];
```

$$t := [0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0]$$

Pentru a compara valorile numerice ale soluţiei date de procedura de iteraţie Euler cu cele obţinute prin calcul simbolic, vom calcula soluţia (obţinută în Capitolul 2) în diferite puncte:

```
> sol_x(t):=exp(t)+exp(-t):
> eval(sol_x(t),t=0);
  eval(sol_x(t),t=0.1); eval(sol_x(t),t=0.2);
  eval(sol_x(t),t=0.3);eval(sol_x(t),t=0.9);
```

2
2.010008336
2.040133511
2.090677029
2.866172771

Se observă că rezultatele obţinute prin calcul numeric cu procedura de iteraţie Euler sunt apropiate de cele obţinute prin calcul simbolic doar pentru valori ale lui t apropiate de condiţia iniţială (zero) aceasta întrucât domeniul de convergenţă este mic. În concluzie, metoda liniilor poligonale a lui Euler ne dă o bună aproximare a soluţiei doar pe intervale mici.

În continuare, vom prezenta un alt exemplu în care vom determina numeric (utilizând procedura de iteraţie Euler) soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 8x_2 \\ \\ \dot{x_2} = \quad x_1 + \ \ x_2 \end{cases} \tag{4.14}$$

soluţie care a fost deja determinată prin calcul simbolic în Capitolul 4:

$$x_1(t) := \frac{5}{3} \cdot e^{3t} - \frac{2}{3} \cdot e^{-3t},$$
$$x_2(t) := \frac{5}{6} \cdot e^{3t} + \frac{1}{6} \cdot e^{-3t}.$$

Programând în *Maple* se obţine:

```
> h:=0.1:  n:=10:
> f1:=(t,x1,x2)->-x1(t)+8*x2(t):  f2:=(t,x1,x2)->x1(t)+x2(t):
> t:=(n,h)->n*h:
> x1:=proc(n,h);
> if n=0 then x1(0) else
  x1(n-1,h)+h*f1(t(n-1,h),x1(n-1,h),x2(n-1,h))end if;
> end proc:
> x2:=proc(n,h)
> if n=0 then x2(0)else
  x2(n-1,h)+h*f2(t(n-1,h),x1(n-1,h),x2(n-1,h))end if;
> end proc:
> x1(0):=1:  x2(0):=1:
> x1(t):=[seq(x1(i,h),i=0..n)];
```

$$x1\,(t) := [1, 1.7, 2.49, 3.433, 4.6001, 6.07617, 7.966249, 10.4031833, 13.55708001, 17.64726322, 22.95758363]$$

```
> x2(t):=[seq(x2(i,h),i=0..n)];
```

$$x2\,(t) := [1, 1.2, 1.49, 1.888, 2.4201, 3.12212, 4.041949, 5.2427688, 6.80736401, 8.843808412, 11.49291558]$$

```
> t:=[seq(t(i,h),i=0..n)];
```

$$t := [0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0]$$

Pentru a compara valorile numerice ale soluţiei cu cele obţinute prin calcul simbolic, vom calcula valorile soluţiei obţinute în Capitolul 4 în câteva puncte:

```
> sol_x1:=5/3*exp(3*t)-2/3*exp(-3*t):
> sol_x2:=5/6*exp(3*t)+1/6*exp(-3*t):
> eval(sol_x1(t),t=0);
  eval(sol_x1(t),t=0.1);eval(sol_x1(t),t=0.2);
```

```
eval(sol_x1(t),t=0.3);eval(sol_x1(t),t=0.9);
```

1
1.755885866
2.670990243
3.828292078
24.75474919

```
> eval(sol_x2(t),t=0);
  eval(sol_x2(t),t=0.1); eval(sol_x2(t),t=0.2);
  eval(sol_x2(t),t=0.3); eval(sol_x2(t),t=0.9);
```

1
1.248352044
1.609900939
2.117430869
12.41097735

Şi în acest caz se observă că, rezultatele obţinute numeric cu procedura de iteraţie Euler sunt apropiate de cele obţinute prin calcul simbolic doar pe un interval mic. Deci, şi în cazul sistemelor de ecuaţii diferenţiale, metoda liniilor poligonale a lui Euler ne dă o bună aproximare a soluţiei doar pe intervale mici.

4.4.2 Metoda Runge-Kutta de determinare numerică a unei soluţii neprelungibile în cazul sistemelor diferenţiale de ordinul întâi

Cea mai răspândită metodă de determinare numerică a unei soluţii neprelungibile este metoda lui Runge-Kutta. Ea a fost pusă la punct la sfârşitul sec. al XIX-lea de matematicienii germani C. Runge şi W. Kutta. În esenţă, este tot o aproximare a soluţiei neprelungibile cu linii poligonale. Convergenţa către soluţia saturată este însă mult mai rapidă decât în cazul liniilor poligonale a lui Euler. Aceasta datorită modului de alegere a "pantei". În practică, sunt folosite câteva forme particulare ale acestei metode: metoda Runge-Kutta de ordinul al doilea $rk2$, al treilea $rk3$, al patrulea (standard)

$rk4$ şi repectiv cea de ordinul al cincilea Fehlberg-Runge-Kutta $rkf45$.
Fără a intra în detalii privitoare la convergenţă, redăm aici procedura de iteraţie a metodei Runge-Kutta standard $rk4$:

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + h \\ X^{i+1} &= X^i + h \cdot m_{R-K} \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} m_{R-K} &= \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\ m_1 &= F(t_i, X^i) \\ m_2 &= F(t_i + h/2, X^i + h/2 \cdot m_1) \\ m_3 &= F(t_i + h/2, X^i + h/2 \cdot m_2) \\ m_4 &= F(t_i + h, X^i + h \cdot m_3). \end{aligned}$$

Această procedură de trecere de la (t_i, X^i) la (t_{i+1}, X^{i+1}) este uşor de programat.

Pentru exemplificare vom considera aceleaşi exemple ca şi in cazul metodei Euler, după care vom compara rezultatele numerice obţinute.
Programând în *Maple* procedura de iteraţie Runge-Kutta standard $rk4$ corespunzătoare ecuaţiei diferenţiale (4.13) obţinem:

```
> h:=0.1:  n:=10:
> f:=(t,x)->-x(t)+2*exp(t):
> t:=(n,h)->n*h:
> x:=proc(n,h) local k1,k2,k3,k4;
> if n=0 then x(0) else
  k1:=f(t(n-1,h),x(n-1,h));
  k2:=f(t(n-1,h)+h/2,x(n-1,h)+h*k1/2);
  k3:=f(t(n-1,h)+h/2,x(n-1,h)+h*k2/2);
  k4:=f(t(n-1,h)+h/2,x(n-1,h)+h*k3);
  x(n-1,h)+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)
```

```
> end if;
> end proc:
> x(0):=2:
> x(t):=[seq(x(i,h),i=0..n)];
```

$$x(t) := [2, 2.008211921, 2.036522685, 2.085215637, 2.154778115, 2.245906324, 2.359512308, 2.496733074, 2.658941974, 2.847762451, 3.065084284]$$

```
> t:=[seq(t(i,h),i=0..n)];
```

$$t := [0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0]$$

```
> sol_x(t):=exp(t)+exp(-t):
> eval(sol_x(t),t=0);
  eval(sol_x(t),t=0.1); eval(sol_x(t),t=0.2);
  eval(sol_x(t),t=0.3); eval(sol_x(t),t=0.9);
```

$$2$$
$$2.010008336$$
$$2.040133511$$
$$2.090677029$$
$$2.866172771$$

Comparând aceste rezultate numerice cu cele obţinute cu metoda Euler şi apoi cu cele obţinute prin calculul simbolic (din paragraful precedent), observăm că metoda lui Runge-Kutta are domeniul de convergenţă întreg intervalul considerat, soluţiile obţinute prin $rk4$ fiind foarte apropiate de cele obţinute prin calcul simbolic.

Programând în *Maple* procedura de iteraţie Runge-Kutta standard $rk4$ corespunzătoare sistemului de ecuaţii diferenţiale (4.14) obţinem:

```
> h:=0.1:  n:=10:
> f1:=(t,x1,x2)->-x1(t)+8*x2(t):f2:=(t,x1,x2)->x1(t)+x2(t):
> t:=(n,h)->n*h:
> x1:=proc(n,h) local k1,k2,k3,k4;
> if n=0 then x1(0) else
      k1:=f1(t(n-1,h),x1(n-1,h),x2(n-1,h));
  k2:=f1(t(n-1,h)+h/2,x1(n-1,h)+h*k1/2,x2(n-1,h)+h*k1/2);
```

```
   k3:=f1(t(n-1,h)+h/2,x1(n-1,h)+h*k2/2,x2(n-1,h)+h*k2/2);
   k4:=f1(t(n-1,h)+h/2,x1(n-1,h)+h*k3,x2(n-1,h)+h*k3);
   x1(n-1,h)+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)
> end if;
> end proc:
> x2:=proc(n,h) local m1,m2,m3,m4;
> if n=0 then x2(0) else
      m1:=f2(t(n-1,h),x1(n-1,h),x2(n-1,h));
   m2:=f2(t(n-1,h)+h/2,x1(n-1,h)+h*m1/2,x2(n-1,h)+h*m1/2);
   m3:=f2(t(n-1,h)+h/2,x1(n-1,h)+h*m2/2,x2(n-1,h)+h*m2/2);
   m4:=f2(t(n-1,h)+h/2,x1(n-1,h)+h*m3,x2(n-1,h)+h*m3);
   x2(n-1,h)+h/6*(m1+2*m2+2*m3+m4)
> end if;
> end proc:
> x1(0):=1:  x2(0):=1:
> x1(t):=[seq(x1(i,h),i=0..n)];
```

$$x1\,(t) := [1., 1.75588586516103406, 2.67099024240189342, 3.82829207712650410, 5.33273206041661840, 7.32072833903442266, 9.97254650756094564, 13.5286455567960680, 18.3114819804437801, 24.7547491716790910, 33.4427034511831920]$$

```
> x2(t):=[seq(x2(i,h),i=0..n)];
```

$$x2\,(t) := [1., 1.24835204296884550, 1.60990093931829237, 2.11743086851170714, 2.81696313624160988, 3.77192924966291354, 5.06892269795481632, 6.82555099257945131, 9.20109996691309817, 12.4109773422481773, 16.7462452598074308]$$

```
> t:=[seq(t(i,h),i=0..n)];
```

$$t := [0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0]$$

```
> sol_x1:=5/3*exp(3*t)-2/3*exp(-3*t):
> sol_x2:=5/6*exp(3*t)+1/6*exp(-3*t):
> eval(sol_x1(t),t=0);
   eval(sol_x1(t),t=0.1);eval(sol_x1(t),t=0.2);
```

```
eval(sol_x1(t),t=0.3);eval(sol_x1(t),t=0.9);
```

1
1.755885866
2.670990243
3.828292078
24.75474919

```
> eval(sol_x2(t),t=0);
  eval(sol_x2(t),t=0.1); eval(sol_x2(t),t=0.2);
  eval(sol_x2(t),t=0.3); eval(sol_x2(t),t=0.9);
```

1
1.248352044
1.609900939
2.117430869
12.41097735

Şi în cazul sistemului considerat se observă o bună convergenţa a metodei Runge-Kutta $rk4$.

4.4.3 Calculul numeric al soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale şi sisteme de ecuaţii diferenţiale

În această secţiune, utilizând metodele de calcul numeric pe care ni le oferă programul *Maple* − în care sunt incluse programele procedurilor de iteraţie Euler sau Runge-Kutta, vom determina soluţiile unor ecuaţii diferenţiale şi respectiv sisteme de ecuaţii diferenţiale, după care, vom reprezenta grafic aceste soluţii.

Primul exemplu se referă la ecuaţia diferenţială neliniară de ordinul al treilea cu coeficienţi variabili:

$$t^2\dddot{x} + 5t\ddot{x} + 4\dot{x} = \ln x, \quad x > 0; \tag{4.15}$$

```
> eq3:=t^2*diff(x(t),t,t,t)+5*t*diff(x(t),t,t)+4*diff(x(t),t)
    =ln(x(t));
```

$$eq3 := t^2 \frac{d^3}{dt^3}x(t) + 5\,t\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 4\,\frac{d}{dt}x(t) = \ln(x(t))$$

```
> dsolve({eq3,x(2)=2,D(x)(2)=1/2,(D@@2)(x)(2)=3});
```

Deoarece *Maple* nu afişează nimic înseamnă că este incapabil de a găsi o soluţie utilizând calculul simbolic; mai precis, nu poate exprima soluţia

problemei cu date iniţiale folosind funcţii elementare. În acest caz, vom rezolva numeric această ecuaţie folosind o sintaxă *dsolve* care să permită rezolvarea ecuaţiei printr-una din metodele numerice clasice: metoda linilor poligonale a lui Euler, metoda Runge-Kutta de ordin doi, trei sau patru, etc. Noua sintaxă *dsolve/numeric/classical* (numerical solution of ordinary differential equations), specifică calculului numeric, are una din următoarele forme:

dsolve(odesys, numeric, method=classical);

dsolve(odesys, numeric, method=classical[choice], vars, options);

în care:

odesys	- ecuaţia sau lista de ecuaţii şi condiţiile iniţiale
numeric	- nume care indică lui *dsolve* să rezolve prin metode numerice
method = classical	- opţională, se indică numele metodei numerice: *impoly* pentru metoda liniilor poligonale a lui Euler; *rk2, rk3, rk4* pentru metoda lui Runge-Kutta de ordin doi, trei, patru,etc.
vars	- lista de variabile dependente (opţională)
options	- diferite opţiuni: output-ul care dorim s,a se afişeze, numărul de puncte, etc.

Dacă nu folosim opţiunea în care să specifiăm o metodă numerică atunci, calculatorul va alege metoda Fehlberg-Runge-Kutta de ordinul cinci (*method=rkf45*) – metodă cu cea mai rapidă convergenţă.

Ecuaţia (4.16) se rezolvă numeric cu metoda $rk4$ astfel:

```
> a:=dsolve({eq3,x(2)=2,D(x)(2)=1/2,(D@@2)(x)(2)=3},numeric,
     method=classical[rk4],output=listprocedure):

> sol_x := subs(a,x(t)):

> sol_x(0.2);sol_x(0.4);sol_x(1);sol_x(2);
  sol_x(5);sol_x(8);sol_x(10);sol_x(30);
```

178.442355332346864
52.2875370423634607
6.30572074481224831
2.0
6.08914601990852234
9.31175162767340581
11.0536870708637434
25.1681506399649386

Prin instrucţiunea *dsolve/numeric/classical*, *Maple* a calculat valorile numerice ale soluţiei ecuaţiei considerate în punctele domeniului de defniţie. Pentru afişarea valorilor soluţiei $x(t)$ în $t = 0.2, 0.4, 1, 2, 5, 8, 10, 30$ s-a folosit funcţia *subs*.

Pentru reprezentarea grafică a soluţiei ecuaţiei diferenţiale rezolvată numeric se utilizează o funcţie de plotare specifică metodelor numerice, care are următoarea sintaxă:

odeplot(dsn, vars, range, options);

în care:

dsn	- numele output-ului ecuaţiei rezolvată numeric
vars	- variabila independentă şi funcţia care se plotează (opţional)
range	- opţional
options	- numărul de puncte, diferite modalităţi de afişare a soluţiei.

Folosind această instrucţiune de plotare pentru reprezentarea grafică (Figura 18) a soluţiei ecuaţiei (4.16) se obţine:

```
> with(plots):odeplot(sol_x,t=0.2..30,numpoints=100);
```

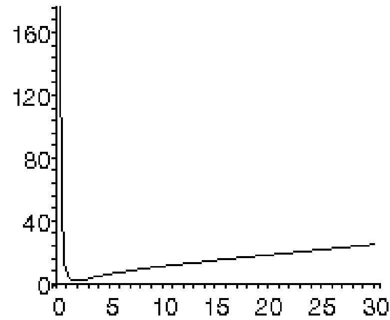


Figura 18

Al doilea exemplu este ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al doilea:

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = -E_0 \cdot \omega \cdot \sin \omega t, \tag{4.16}$$

a cărei soluţie $i(t)$ exprimă intensitatea curentului într-un circuit R-L-C (vezi Capitolul 3). Considerând valori numerice pentru R, L, C, E_0 şi reducând ecuaţia la un sistem de două ecuaţii diferenţiale se obţine:

```
> R:=2:  C:=0.1:  L:=1:  E=10: ω:=Pi/4:
> Eq:=L*diff(i(t),t,t)+R*diff(i(t),t)+(1/C)*i(t)=-E*ω *sin(t*ω):
> sys_Eq1:=diff(x1(t),t)=x2(t):
> sys_Eq2:=diff(x2(t),t)=-10*x1(t)-2*x2(t)-10*Pi/4*sin(t*Pi/4):
```

Pentru rezolvarea numerică a acestui sistem şi pentru vizualizarea soluţiilor corespunzătoare la diferite condiţii iniţiale (Figura 19 şi Figura 20) se folosesc funcţiile:

$$with(DEtools) : DEplot$$
$$with(DEtools) : phaseportrait$$
$$with(DEtools) : DEplot3d$$

```
> with(DEtools):DEplot({sys_Eq1,sys_Eq2},{x1(t),x2(t)},
  t=0..15,[[x1(0)=0,x2(0)=0],[x1(0)=1,x2(0)=1],
  [x1(0)=3,x2(0)=3]],scene=[t,x1(t)],method=classical[rk4]);
```

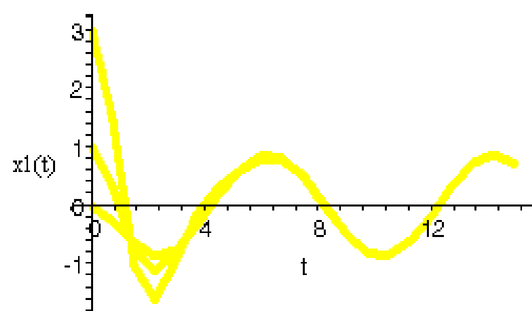


Figura 19

```
> with(DEtools):DEplot({sys_Eq1,sys_Eq2},{x1(t),x2(t)},
  t=0..15,[[x1(0)=0,x2(0)=0],[x1(0)=1,x2(0)=1],
  [x1(0)=3,x2(0)=3]],scene=[t,x2(t)],method=classical[rk4]);
```

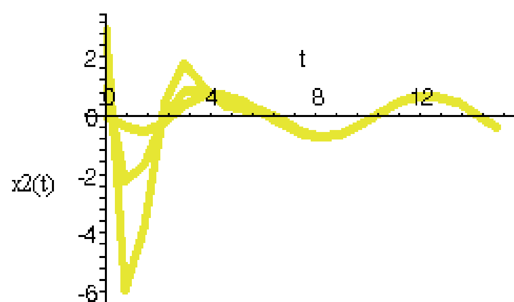


Figura 20

În aceste figuri sunt reprezentate soluţiile $(x_1(t), x_2(t))$ pentru trei condiţii iniţiale. Se observă că, indiferent de condiţiile iniţiale, după un anumit timp soluţia se stabilizează în jurul unei soluţii periodice. Acest fapt, reiese şi din portretele de fază care se obţin cu:

```
> with(DEtools):phaseportrait([sys_Eq1,sys_Eq2],
  [x1(t),x2(t)],t=0..15,[[x1(0)=0,x2(0)=0]],
  scene=[x1(t),x2(t)],method=classical[rk4]);
```

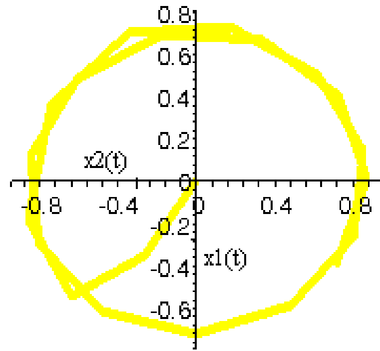


Figura 21

```
> with(DEtools):phaseportrait([sys_Eq1,sys_Eq2],
  [x1(t),x2(t)],t=0..15,[[x1(0)=1,x2(0)=1]],
  scene=[x1(t),x2(t)],method=classical[rk4]);
```

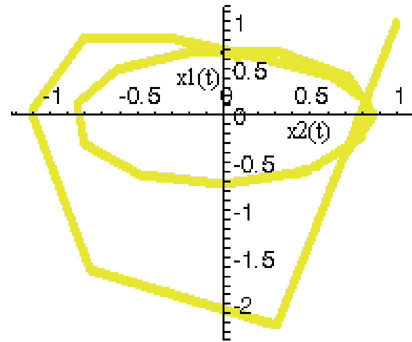


Figura 22

Portretele de fază (Figura 21 şi Figura 22) arată faptul că, soluţiile sistemului (intesitatea curentului şi variaţia acesteia) se stabilizează după un anumit timp, tinzând către un ciclu limită. Mai precis, folosind condiţii iniţiale din interiorul sau exteriorul ciclului limită soluţiile se stabilizează în jurul unei soluţii periodice. Acelaşi fenomen de stabilizare se observă şi din figura tri-dimensională (Figura 23):

```
> with(DEtools):DEplot3d({sys_Eq1,sys_Eq2},
  {x1(t),x2(t)},t=0..15,[[x1(0)=0,x2(0)=0]],
  scene=[t,x1(t),x2(t)],method=classical[rk4]);
```

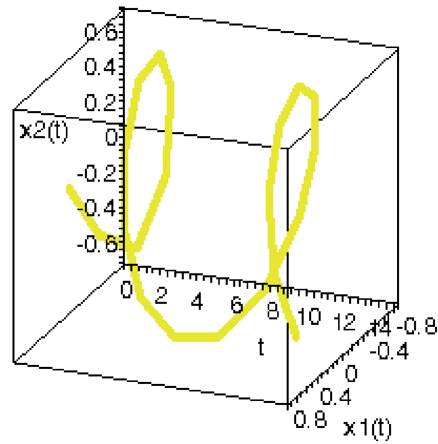


Figura 23

Un alt exemplu este sistemul lui Lotka-Volterra de două ecuaţii diferenţiale neliniare care constituie un model matematic utilizat în biologie care descrie evoluţia în timp a două specii pradă-prădător (de exemplu sardine-rechini):

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(1-y) \\ \dot{y} &= 0.3 \cdot y(x-1), \end{cases} \tag{4.17}$$

unde $x(t)$ reprezintă numărul sardinelor, iar $y(t)$ numărul de rechini. Cu instrucţiunile $with(DEtools):DEplot$ (Figura 24 şi Figura 25) şi respectiv $with(DEtools):DEplot3d$ (Figura 26) se obţine evoluţia în timp a celor două specii:

```
> with(DEtools):DEplot({diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),
  diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1)},{x(t),y(t)},
  t=0..50,[[x(0)=0.8,y(0)=0.5]],scene=[t,x(t)],
  linecolor=t/2,method=rkf45);
```

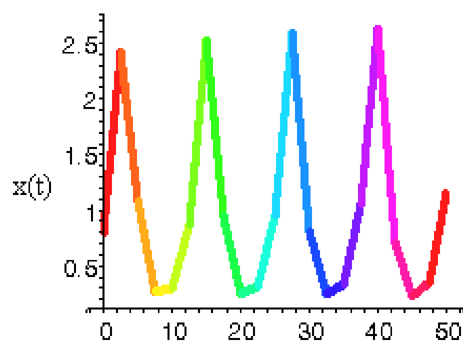


Figura 24

```
> with(DEtools):DEplot({diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),
  diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1)},{x(t),y(t)},
  t=0..50,[[x(0)=0.8,y(0)=0.5]],scene=[t,y(t)],
  linecolor=t/2,method=rkf45);
```

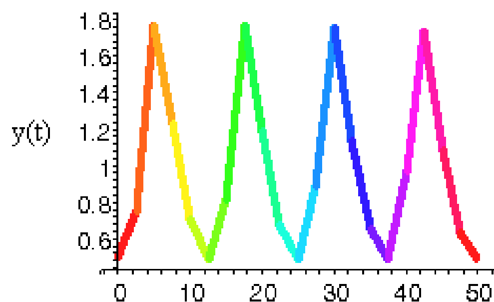


Figura 25

```
> with(DEtools):DEplot3d({diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),
  diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1)},{x(t),y(t)},t=0..50,
  [[x(0)=0.8,y(0)=0.5]],scene=[t,x(t),y(t)],
  stepsize=.2,linecolor=t/2,method=rkf45);
```

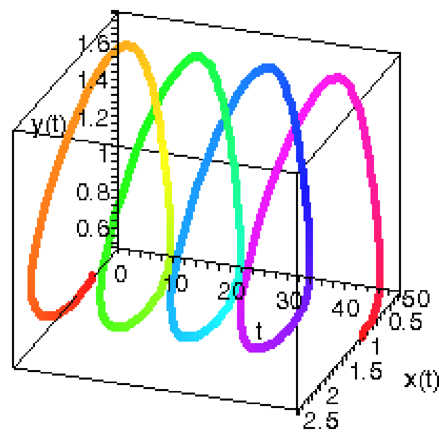


Figura 26

Portretul de fază a evoluţiei celor două specii este prezentată în Figurile 27:

```
>  with(DEtools):DEplot([diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),
   diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1)],[x(t),y(t)],t=0..13,
   [[x(0)=1.2,y(0)=1.2],[x(0)=1,y(0)=.7],[x(0)=.8,y(0)=.5]],
   stepsize=.2,title=‘Lotka-Volterra model‘,
   color=[.3*y(t)*(x(t)-1),x(t)*(1-y(t)),.1],
   linecolor=t/2,arrows=MEDIUM,method=rkf45);
```

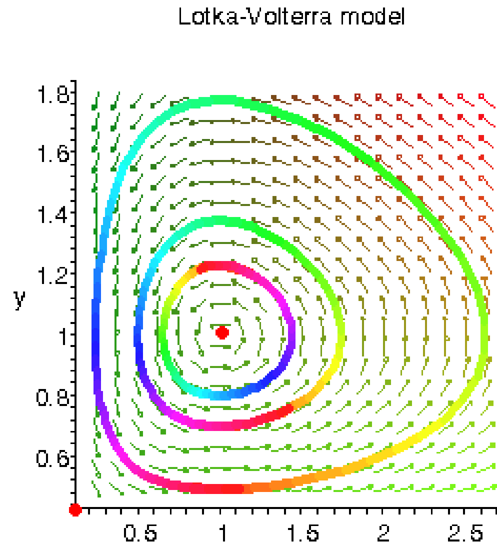


Figura 27

Acest sistem are soluţiile staţionare $(0,0)$, $(1,1)$ şi soluţii periodice (Figura 26). Interpretarea acestora este următoarea:

i) soluţia staţionară $(0,0)$ reprezintă dispariţia ambelor specii;

ii) soluţia staţionară $(1,1)$ reprezintă situaţia de echilibru (numărul de sardine este egal cu numărul de rechini);

iii) soluţiile periodice care înconjoară soluţia staţionară $(1,1)$ reprezintă variaţii ale numărului de sardine şi respectiv rechini între două limite. Aceste variaţii (creşteri sau descreşteri) descriu lipsa sau abundenţa de hrană (sardine) care duce la micşorarea sau creşterea numărului de prădători (rechini).

Un alt portret de fază interesant este al sistemului:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - z \\ \dot{y} &= z \cdot x \\ \dot{z} &= x - 2y, \end{cases} \tag{4.18}$$

care arată că, din orice punct ar pleca soluţiile, toate vor evolua către zero (Figura 28):

```
>  with(DEtools):phaseportrait([D(x)(t)=y(t)-z(t),
   D(y)(t)=z(t)-x(t),D(z)(t)=x(t)-y(t)*2],[x(t),y(t),z(t)],
   t=-10..50,[[x(0)=3,y(0)=3,z(0)=3]],stepsize=.05,
   scene=[z(t),y(t)],linecolour=sin(t*Pi/2),
   method=classical[rk4]);
```

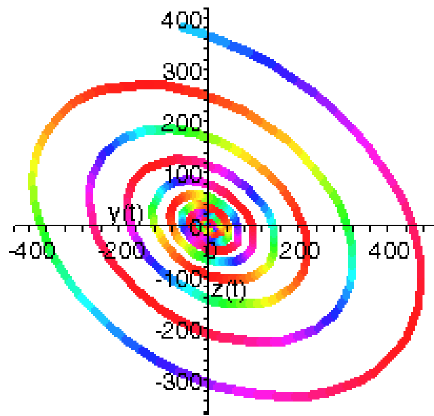


Figura 28

4.5 Integrale prime

Considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul întâi explicit:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dot{x_2} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ .... \\ \dot{x_n} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{4.19}$$

în care funcţiile $f_1, f_2, ..., f_n$ sunt funcţii reale de clasă C^1 definite pe $I \times D$; $I \subset I\!R^1$, I - interval deschis şi $D \subset I\!R^n$ - domeniu.

Definiţia 4.5.1 *Se numeşte integrală primă a sistemului (4.19) o funcţie $U : I \times D \to I\!R^1$ de clasă C^1 care nu este constantă, dar este constantă pe soluţiile sistemului (4.19).*

Teorema 4.5.1 *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o funcţie $U : I \times D \to I\!R^1$ de clasă C^1 neconstantă să fie integrală primă este ca U să verifice:*

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot f_i = 0 \quad (\forall)\ (t, x_1, ..., x_n) \in I \times D.$$

Demonstraţie: Fie $(t_0, x_1^0, ..., x_n^0) \in I \times D$ şi $x_1(t), ..., x_n(t)$ soluţia sistemului (4.19) care verifică $x_i(t_0) = x_i^0$, $i = \overline{1,n}$ şi $U(t, x_1(t), ..., x_n(t))$ o integrală primă. Deoarece $U(t, x_1(t), ..., x_n(t))$ este constantă, rezultă că

$$\frac{dU}{dt}(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \equiv 0.$$

De aici avem că

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, x_1(t), ..., x_n(t)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \cdot f_i(t, x_1(t), ..., x_n(t)) = 0,$$

$$(\forall)\ t \in I.$$

Pentru $t = 0$, rezultă de aici egalitatea:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t_0, x_1^0, ..., x_n^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(t_0, x_1^0, ..., x_n^0) \cdot f_i(t_0, x_1^0, ..., x_n^0) = 0$$

Întrucât $(t_0, x_1^0, ..., x_n^0)$ este un punct oarecare din mulţimea $I \times D$ rezultă

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial t} \cdot f_i = 0, \ (\forall)(t, x_1, ..., x_n) \in I \times D.$$

Să arătăm acum implicaţia reciprocă, adica: dacă $U : I \times D \to I\!R^1$ este o funcţie de clasă C^1, care nu este constantă şi verifică

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial t} \cdot f_i = 0$$

atunci U este constantă pe soluţiile sistemului (4.19).

În acest scop considerăm o soluţie oarecare $x_1(t), ..., x_n(t)$ a sistemului (4.19) şi funcţia $\varphi(t) = U(t, x_1(t), ..., x_n(t))$. Pentru a arăta că funcţia $\varphi(t)$ este constantă calculăm derivata ei şi găsim:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial t}(t, x_1(t), ..., x_n(t)) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \cdot f_i(t, x_1(t), ..., x_n(t)) = 0, \quad (\forall)\ t \in I. \end{aligned}$$

Astfel, rezultă că funcţia $\varphi(t)$ este constantă.

Observaţia 4.5.1 Pentru ca o funcţie $U : D \to I\!R^1$ de clasă C^1 neconstantă care nu depinde de t să fie integrală primă este necesar şi suficient ca U să verifice $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} f_i = 0$.

Definiţia 4.5.2 *Sistemul (4.19) se zice autonom dacă funcţiile f_i nu depind de t; $f_i : D \to I\!R^n$, $f_i = \dot{f}_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = \overline{1, n}$.*

Observaţia 4.5.2 Problema determinării mişcării unui punct material de masă m într-un câmp de forţe potenţial având potenţialul V, revine la determinarea soluţiilor sistemului canonic a lui Hamilton:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.20}$$

unde

$$H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(x_1, x_2, x_3)$$

este funcţia Hamilton asociată punctului material.

Sistemul (4.20) este autonom, iar condiţia ca o funcţie $U(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ să fie integrală primă pentru (4.20) este ca U să verifice

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial U}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)=0.$$

În particular, rezultă că funcţia lui Hamilton este integrală primă pentru sistemul canonic.

Revenim la cazul general al sistemelor autonome:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1, ..., x_n) \\ \dot{x_2} = f_2(x_1, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x_n} = f_n(x_1, ..., x_n) \end{cases} \tag{4.21}$$

$f_i : D \subset I\!R^n \to I\!R^1$, $i = \overline{1, n}$ pentru care considerăm integrale prime U_j, $j = \overline{1, m}$ care nu depind de variabila independentă t; $U_j = U_j(x_1, ..., x_n)$.

Definiţia 4.5.3 *Un sistem de $m \le n$ integrale prime ale sistemului (4.19) se zice independent dacă rangul matricei:*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial U_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial U_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial U_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial U_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial U_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial U_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial U_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

este egal cu m.

În continuare vom arăta importanţa integralelor prime.

Teorema 4.5.2 *Dacă se cunosc $m < n$ integrale prime ale sistemului (4.19) atunci problema determinării soluţiilor sistemului (4.19) revine la problema determinării soluţiilor unui sistem de $n - m$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.*
Dacă se cunosc n integrale prime atunci problema determinării soluţiilor sistemului (4.19) revine la rezolvarea unui sistem de ecuaţii implicite.

Demonstraţie: Considerăm la început $m < n$ integrale prime $U_1, ..., U_m$ independente ale sistemului (4.19). Independenţa asigură faptul că din sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} U_1(t, x_1, ..., x_n) - c_1 = 0 \\ U_2(t, x_1, ..., x_n) - c_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_m(t, x_1, ..., x_n) - c_m = 0 \end{cases} \tag{4.22}$$

putem exprima m dintre necunoscutele $x_1, ..., x_n$ în funcţie de celelalte necunoscute, şi în funcţie de t şi de constantele $c_1, ..., c_m$.

Pentru a face o alegere presupunem că $x_1, ..., x_m$ se exprimă în funcţie de $t, x_{m+1}, ..., x_n$:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, x_{m+1}, ..., x_n, c_1, ..., c_m) \\ x_2 = \varphi_2(t, x_{m+1}, ..., x_n, c_1, ..., c_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = \varphi_m(t, x_{m+1}, ..., x_n, c_1, ..., c_m) \end{cases}$$

Dacă $x_1(t), ..., x_n(t)$ este o soluţie a sistemului (4.19), atunci avem:

$$\begin{cases} x_1(t) = \varphi_1(t, x_{m+1}(t), ..., x_n(t), c_1, ..., c_m) \\ x_2(t) = \varphi_2(t, x_{m+1}(t), ..., x_n(t), c_1, ..., c_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m(t) = \varphi_m(t, x_{m+1}(t), ..., x_n(t), c_1, ..., c_m) \end{cases}$$

Rezultă în acest fel că primele m componente ale soluţiei $x_1(t), ..., x_m(t)$ se construiesc cu restul componentelor $x_{m+1}(t), ..., x_n(t)$ şi a constantelor $c_1, ..., c_m$ prin intermediul funcţiilor $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$.

Prin înlocuire în sistemul (4.19) rezultă că $x_{m+1}(t), ..., x_n(t)$ verifică următorul sistem de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_{m+1}}{dt} = f_{m+1}(t, \varphi_1(t, x_{m+1}, .., x_n, c_1, .., c_m), .., \varphi_m(t, x_{m+1}, .., x_n, c_1, .., c_m), x_{m+1}, .., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, \varphi_1(t, x_{m+1}, .., x_n, c_1, .., c_m), .., \varphi_m(t, x_{m+1}, .., x_n, c_1, .., c_m), x_{m+1}, .., x_n) \end{cases}$$

Astfel, rezultă că funcţiile $x_{m+1}, ..., x_n$ verifică un sistem de $n-m$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.

Dacă $m = n$ atunci sistemul algebric (4.22) este

$$U_k(t, x_1, x_2, ..., x_n) - c_k = 0, \;\; k = \overline{1, n}$$

din care obţinem:

$$x_k = \varphi(t, c_1, ..., c_m) \quad k = \overline{1, n}.$$

Imprecis, dar sugestiv putem spune, cu cât avem mai multe integrale prime cu atât mai mult se reduce dimensiunea sistemului diferenţial. Dacă $m = n$ problema rezolvării sistemului diferenţial se reduce la rezolvarea unui sistem algebric.

Vom relua în continuare câteva exemple în cazul unei singure ecuaţii $n = 1$ când este nevoie doar de o singură integrală primă.

Exemple:

1. Arătaţi că dacă $f : (a, b) \to I\!R^1$ este funcţie continuă, atunci funcţia

   $$U(t, x) = x - \int_{t_*}^{t} f(\tau)d\tau$$

   este integrală primă pentru ecuaţia diferenţială $\dot{x} = f(t)$. Deduceţi în acest fel că soluţiile acestei ecuaţii diferenţiale sunt soluţiile ecuaţiei algebrice

   $$x - \int_{t_*}^{t} f(\tau)d\tau - c = 0.$$

2. Arătaţi că dacă $g : (c, d) \to I\!R^1$ este o funcţie continuă care nu se anulează, atunci funcţia

   $$U(t, x) = t - \int_{x_*}^{x} \frac{du}{g(u)}$$

   este integrală primă pentru ecuaţia diferenţială $\dot{x} = g(x)$.

   Deduceţi astfel că soluţiile acestei ecuaţii diferenţiale sunt soluţiile ecuaţiei algebrice

   $$t - \int_{x_*}^{x} \frac{du}{g(u)} - c = 0.$$

3. Arătaţi că dacă $f : (a, b) \to I\!R^1$ şi $g : (c, d) \to I\!R^1$ sunt funcţii continue şi funcţia g nu se anulează, atunci funcţia
$$U(t, x) = \int_{t_*}^{t} f(\tau)d\tau - \int_{x_*}^{x} \frac{du}{g(u)}$$
este integrală primă pentru ecuaţia diferenţială $\dot{x} = f(t)\cdot g(x)$. Deduceţi de aici că soluţiile acestei ecuaţii diferenţiale sunt soluţiile ecuaţiei algebrice.

Revenind la cazul general $n > 1$, problema naturală care se pune este: *care este numărul maxim de integrale prime independente pentru sistemul (4.19)?*

Răspunsul la această întrebare este dată de următoarea teoremă.

Teorema 4.5.3 *Pentru orice punct* $(t_0, x_1^0, ..., x_n^0) \in I \times D$ *există o vecinătate deschisă* $V \subset I \times D$ *astfel ca pe* V *sistemul (4.19) are* n *integrale prime independente şi orice integrală primă definită pe* V *se exprimă ca funcţie de cele* n *integrale prime independente.*

Demonstraţie: Fie $X(t; t_0, X^0)$ soluţia saturată a sistemului (4.19) care verifică $X(t_0) = X^0$ şi I_0 intervalul ei de definiţie. Considerăm un interval compact $[T_1, T_2]$ inclus în I_0 care conţine punctul t_0 în interior.

Conform teoremei de continuitate în raport cu condiţiile iniţiale există o vecinătate U_0 a lui $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ astfel încât pentru orice $X' = ({x_1}', ..., {x_n}') \in U_0$ soluţia sistemului (4.19) care coincide cu X' în $t = t_0$ este definită pe $[T_1, T_2]$; notăm cu $X(t; t_0, X')$ această soluţie saturată.

Funcţia $(t, X') \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} X(t; t_0, X')$ este de clasă C^1 pe baza teoremei de diferenţiabilitate în raport cu condiţiile iniţiale. Din aceeaşi teoremă rezultă că matricea $\dfrac{\partial}{\partial X'}[X(t; t_0, X')]$ este nesingulară şi prin urmare aplicaţia $X' \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} X(t; t_0, X')$ este local inversabilă. Există deci două vecinătaţi deschise W_1, W_2 ale punctului (t_0, X^0) şi o funcţie ψ de clasă C^1, $\psi : W_2 \to W_1$ cu proprietăţile: $\psi(t, X(t; t_0, X')) \equiv (t, X')$ şi $X(t; t_0, \psi(t, X'')) \equiv X''$ $(\forall)$ $(t, X') \in W_1$ şi $(t, X'') \in W_2$.

Componentele scalare ψ_k ale funcţiei ψ rămân constante atunci când $x_1, ..., x_n$ se înlocuieşte cu o soluţie a sistemului definită în vecinătatea considerată, deci ψ_k sunt integrale prime. În plus $\psi(t_0, X') = (t_0, X')$ de unde rezultă că $rang\left(\dfrac{\partial \psi_k}{\partial x'_r}\right) = n$. Adică integrabile prime $\psi_1, ..., \psi_n$ sunt independente.

Fie acum U o integrală primă oarecare a sistemului (4.1). Conform definiţiei $U(t, X(t; t_0, X'))$ nu depinde de t şi putem scrie

$$U(t, X(t; t_0, X')) = h(X').$$

Înlocuind X' cu $\psi(t, X'')$ şi ţinând seama de egalitatea

$$X(t; t_0, \psi(t, X'')) \equiv X''$$

obţinem:

$$U(t, X'') = h(\psi(t, X'')).$$

Această din urmă egalitate arată că integrala primă U este o funcţie h de cele n integrale prime independente $\psi_1, ..., \psi_n$.

O metodă de determinare a integralelor prime este dată de ecuaţia:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot f_i = 0$$

În această ecuaţie U este funcţie necunoscută şi intervine în ecuaţie prin intermediul derivatelor parţiale de ordinul întâi. De aceea ecuaţia aceasta se numeşte ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi. Orice soluţie a acestei ecuaţii este o integrală primă.

Observăm că dacă funcţiile $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n$ sunt astfel ca

$$\mu_0 + \sum_{1}^{n} \mu_i \cdot f_i = 0$$

şi există o funcţie U cu proprietatea $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \mu_0$ şi $\dfrac{\partial U}{\partial x_i} = \mu_i$, atunci funcţia U este integrală primă pentru sistemul (4.19).

Exerciţii:

1. Fie sistemul de ecuaţii:
$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \\ \dot{x_2} = -x_1 \end{cases}$$
Să se determine o integrală primă.
R: $\begin{cases} \mu_0 = 0,\ \mu_1 = x_1,\ \mu_2 = x_2 \\ \\ U(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$

2. În descrierea mişcării solidului rigid intervine sistemul:
$$\begin{cases} A \cdot \dot{p} &= (B - C)g \cdot r \\ B \cdot \dot{q} &= (C - A)r \cdot p \\ C \cdot \dot{r} &= (A - B)p \cdot q \end{cases}$$
Să se determine două integrale prime pentru sistemul considerat.
R: $U_1(p, q, r) = Ap^2 + Bq^2 + cr^2$ şi $U_2(p, q, r) = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$.

3. Să se determine două integrale prime pentru sistemul:

$a)\quad \dfrac{dx}{x} = -\dfrac{dy}{2y} = \dfrac{dz}{-z}$

R:$U_1(x, y, z) = x\sqrt{y}$ şi $U_2(x, y, z) = xz$.

$b)\quad \dfrac{dx}{z - y} = \dfrac{dy}{x - z} = \dfrac{dz}{y - x}$

R: $U_1(x, y, z) = x + y + z$ şi $U_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$c)\quad \dfrac{dx}{x^2(y + z)} = \dfrac{dy}{-y^2(z + x)} = \dfrac{dz}{z^2(y - x)}$

R: $U_1(x, y, z) = xyz$ şi $U_2(x, y, z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$.

d) $$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}$$

R: $U_1(x, y, z) = x^2 - y^2$ şi $U_2(x, y, z) = \frac{xy}{z}$.

Capitolul 5

Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi

5.1 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare

Definiţia 5.1.1 *O ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară este o relaţie de dependenţă funcţională de forma:*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{5.1}$$

între derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei necunoscute $u = u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Funcţiile $f_0, f_1, \ldots, f_n$ în ecuaţia (5.1) $f_i : \Omega \subset I\!R^{n+1} \to I\!R^1$ se consideră cunoscute şi sunt presupuse funcţii de clasă C^1 pe Ω.

Definiţia 5.1.2 *O soluţie a ecuaţiei (5.1) este o funcţie*

$$u : \Omega' \subset \Omega \to I\!R^1$$

de clasă C^1 astfel încât în toate punctele $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ să avem verificată identitatea:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \cdot f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$$

Fie $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Omega$ astfel încât

$$\sum_{i=0}^{n} f_i^2(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0.$$

Existenţa unui punct $\xi \in \Omega$ cu această proprietate poate fi admisă pentru că, în caz contrar, toate funcţiile f_i ar fi identic nule pe Ω de unde ar rezulta că ecuaţia (5.1) este verificată, oricare ar fi funcţia u de clasă C^1 pe Ω. Putem admite de asemenea că $f_0(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$. Aceasta întrucât din ipoteza $\sum\limits_{i=0}^{n} f_i(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$ rezultă că există $i_0 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ astfel ca $f_{i_0}(\xi) \neq 0$. Ceea ce presupunem noi în plus este faptul că $i_0 = 0$, adică $f_0(\xi) \neq 0$.
Dacă $f_0(\xi) = 0$, atunci se face raţionamentul pentru f_{i_0}.
Revenim deci la $f_0(\xi) \neq 0$ şi deoarece f_0 este continuă, există o vecinătate V_ξ a punctului ξ astfel ca $f_0(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V_\xi$. Considerăm acum sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\dot{x}_i = g_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n} \tag{5.2}$$

unde

$$g_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_i(t, x_1, \ldots, x_n)}{f_0(t, x_1, \ldots, x_n)}$$

t fiind componenta x_0 a vectorului $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in V_\xi$, $t = x_0$. Sistemul (5.2) este definit pentru $(t, x_1, \ldots, x_n) \in V_\xi$,iar funcţiile g_i sunt de clasă C^1 pe V_ξ.

Teorema 5.1.1 *Soluţiile ecuaţiei (5.1) definite pe $\widetilde{V} \subset V_\xi$ sunt integrale prime ale sistemului (5.2) şi reciproc.*

Demonstraţie: Fie $u : \widetilde{V} \to R^1$ o soluţie a ecuaţiei (5.1). Cu notaţiile introduse avem:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_1, \ldots, x_n) \cdot f_0(t, x_1, \ldots, x_n) +$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, x_1, \ldots, x_n) \cdot f_k(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$$

deci

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, x_1, \ldots, x_n) \cdot \frac{f_k(t, x_1, \ldots, x_n)}{f_0(t, x_1, \ldots, x_n)} \equiv 0$$

şi prin urmare:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_1, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, x_1, \ldots, x_n) \cdot g_k(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$$

ceea ce arată că u este integrală primă a sistemului (5.2).
Cu un raţionament asemănător se arată că dacă u este integrală primă pentru sistemul (5.2) atunci este soluţie pentru ecuaţia (5.1).

Prin urmare, problema determinării soluţiilor ecuaţiei (5.1) revine la problema determinării integralelor prime pentru sistemul (5.2).
Ţinând seama de cele demonstrate pentru integralele prime ale unui sistem, rezultă că soluţiile ecuaţiei cu derivate parţiale (5.1) au următoarele proprietăţi:

i) oricare ar fi $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$, dacă $f_0(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$, atunci există o vecinătate deschisă $V \subset \Omega$ a punctului $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ şi n funcţii $u_1, \ldots, u_n : V \to R^1$ de clasă C^1 astfel încât:

   a) $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sunt soluţii ale ecuaţiei (5.1);

   b) $u_k(x_0^0, x_1, \ldots, x_n) = x_k$;

   c) $\det \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \neq 0, \quad k, l = 1, 2, \ldots, n.$

ii) dacă u este o soluţie oarecare a ecuaţiei (5.1) definită pe $\widetilde{V} \subset V$, atunci există o vecinătate deschisă D a lui $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ şi o funcţie $\gamma : D \subset I\!R^n \to R^1$ astfel ca
$u(x_0, x_1, \ldots, x_n) =$
$= \gamma(u_1(x_0, x_1, \ldots, x_n), u_2(x_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)).$

Definiţia 5.1.3 *(Problema Cauchy pentru ecuaţia (5.1))*
Se numeşte problemă Cauchy pentru ecuaţia (5.1) problema determinării unei soluţii u a ecuaţiei (5.1) astfel ca

$$u(x_0^0, x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n), \quad (\forall)(x_1, \ldots, x_n) \in D' \subset D,$$

unde x_0^0 şi funcţia $h : D \subset I\!R^n \to R^1$ de clasă C^1 sunt date; D fiind o vecinătate deschisă a lui $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Teorema 5.1.2 *Dacă în* $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \Omega$ *avem*

$$f_0(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$$

atunci pentru h *de clasă* C^1 *definită într-o vecinătate deschisă* D *a lui* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *problema Cauchy are soluţie unică.*

Demonstraţie: Considerăm soluţiile $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ale ecuaţiei (5.1) definite în vecinătatea deschisă V a lui $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ cu proprietatea

$$u_k(x_0^0, x_1, \ldots, x_n) = x_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Există o vecinătate $\widetilde{V} \subset V$ a lui $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ astfel ca pentru $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \widetilde{V}$ să avem

$$(u_1(x_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)) \in D.$$

Fie

$$u(x_0, x_1, \ldots, x_n) = h(u_1(x_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)).$$

Funcţia $u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ definită astfel este de clasă C^1 şi verifică ecuaţia (5.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_0} \cdot f_0^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot f_k &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_0} \cdot f_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial y_l} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \cdot f_k = \\ &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial y_l} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_0} \cdot f_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \cdot f_k \right) = 0. \end{aligned}$$

În plus,

$$\begin{aligned} u(x_0^0, x_1, \ldots, x_n) &= h(u_1(x_0^0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_0^0, x_1, \ldots, x_n)) = \\ &= h(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

deci u este soluţia problemei Cauchy.
Pentru unicitate să presupunem că $\widetilde{u}$ este o altă soluţie a problemei Cauchy definită pe $\widetilde{V}$. Rezultă că există γ astfel ca

$$\widetilde{u}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \gamma(u_1(x_0, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)).$$

De aici rezultă că

$$h(x_1,\ldots,x_n)=\widetilde{u}(x_0^0,x_1,\ldots,x_n)=\gamma(x_1,\ldots,x_n);$$

şi deci $\widetilde{u}$ coincide cu u.
Dacă în punctul $(x_0^0,x_1^0,\ldots,x_n^0)$ avem

$$f_k(x_0^0,x_1^0,\ldots,x_n^0)\neq 0,$$

atunci se poate formula un rezultat analog pentru o funcţie h definită pe o vecinătate deschisă a punctului $(x_0^0,x_1^0,\ldots,x_{k-1}^0,x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0)$.

Problema 5.1.1
O funcţie $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ se zice funcţie omogenă de grad zero în sens Euler dacă pentru orice $\lambda\in I\!R_+^1$ avem

$$u(\lambda\cdot x_1,\lambda\cdot x_2,\ldots,\lambda\cdot x_n)=u(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Arătaţi că funcţia $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de clasă C^1 este omogenă de grad zero în sens Euler dacă şi numai dacă există $\gamma=\gamma(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-1})$ astfel ca:

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\gamma\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\ldots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

Rezolvare: Din

$$u(\lambda\cdot x_1,\lambda\cdot x_2,\ldots,\lambda\cdot x_n)=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

rezultă că $\dfrac{d}{d\lambda}[u(\lambda\cdot x_1,\lambda\cdot x_2,\ldots,\lambda\cdot x_n)]=0$ adică:

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}(\lambda\cdot x_1,\lambda\cdot x_2,\ldots,\lambda\cdot x_n)+\ldots+$$

$$x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}(\lambda\cdot x_1,\lambda\cdot x_2,\ldots,\lambda\cdot x_n)=0,\ (\forall)\lambda>0.$$

Pentru $\lambda=1$ rezultă:

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\ldots+x_n\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,\ (\forall)(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

de unde avem că:

$$u(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\gamma\left(\frac{x_1}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\ldots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

Exerciţii:

1. Rezolvaţi următoarele ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare:

$a)\quad y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

R: $u(x, y) = \gamma(x^2 + y^2)$

$b)\quad x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

R: $u(x, y) = \gamma\left(\frac{y}{x}\right)$

$c)\quad x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

R: $u(x, y, z) = \gamma\left(x\sqrt{y}, xz\right)$

$d)\quad xy \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \sqrt{1 - y^2}\left(y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right) = xy \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$

R: $u(x, y, z) = \gamma\left(2yz + x(\left(y + \sqrt{1 - y^2}\right), x \cdot e^{\arcsin y}\right)$

2. Rezolvaţi următoarele probleme Cauchy:

$a)\quad x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad u(x, 1) = x$

R: $u(x, y) = \frac{x}{y}$

b) $\sqrt{x} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad u(1, y, z) = y - z$

R: $u(x, y, z) = y + z - 2\sqrt{yz}$

c) $(1 + x^2) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + xy \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad u(0, y) = y^2$

R: $u(x, y) = \dfrac{y^2}{1 + x^2}$

5.2 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniare

Definiţia 5.2.1 *O ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniară este o relaţie de dependenţă funcţională de forma:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot f_i(x_1, \ldots, x_n, u) - g(x_1, \ldots, x_n, u) = 0 \tag{5.3}$$

dintre funcţia necunoscută $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ *şi derivatele parţiale* $\frac{\partial u}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}$ *ale acesteia.*

Funcţiile $f_1, \ldots, f_n$ şi g în ecuaţia (5.3) se consideră date:

$$f_i, g : \Omega \subset I\!R^{n+1} \longrightarrow R^1$$

şi sunt presupuse de clasă C^1.
Ecuaţia (5.3) se numeşte cvasiliniară pentru că este liniară în derivatele parţiale $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, dar nu este liniară în general în u.

Definiţia 5.2.2 *O soluţie a ecuaţiei (5.3) este o funcţie:*

$$u : D \subset R^n \longrightarrow R^1$$

de clasă C^1 *care are proprietatea că pentru orice* $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ *punctul* $(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) \in \Omega$ *şi*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \cdot f_i(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) -$$

$$g(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0$$

în D.

Pentru determinarea soluţiilor ecuaţiei (5.3) considerăm ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot f_i(x_1, \ldots, x_n, u) + \frac{\partial v}{\partial u} \cdot g(x_1, \ldots, x_n, u) = 0 \tag{5.4}$$

cu $(x_1, \ldots, x_n, u) \in \Omega$

Teorema 5.2.1 *Dacă v este soluţie a ecuaţiei (5.4) defintă pe $\Omega' \subset \Omega$, iar $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) \in \Omega'$ şi*

$$\frac{\partial v}{\partial u}(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) \neq 0$$

atunci funcţia $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ definită implicit prin ecuaţia

$$v(x_1, \ldots, x_n, u) - v(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) = 0$$

este o soluţie a ecuaţiei (5.3).

Demonstraţie: Fie $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ funcţia definită implicit prin ecuaţia

$$v(x_1, \ldots, x_n, u) - v(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) = 0.$$

Avem:

$$v(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) - v(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) \equiv 0$$

şi prin derivare în raport cu x_k găsim:

$$\frac{\partial v}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) +$$

$$\frac{\partial v}{\partial u}(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$$

pentru $k = 1, 2, \ldots, n$.
Înmulţind pe rând aceste egalităţi cu $f_k(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n))$ şi adunându-le găsim:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k}(X, u(X)) \cdot f_k(X, u(X)) +$$

$$\frac{\partial v}{\partial u}(X, u(X)) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}(X, u(X)) \cdot f_k(X, u(X)) \equiv 0$$

unde $X = (x_1, \ldots, x_n)$.
Dar v fiind soluţie a ecuaţiei (5.4) are loc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) \cdot f_k(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) +$$

$$+\frac{\partial v}{\partial u}(x_1,\ldots,x_n,u(x_1,\ldots,x_n))\cdot g(x_1,\ldots,x_n,u(x_1,\ldots,x_n))\equiv 0$$

şi prin urmare:

$$\frac{\partial v}{\partial u}(x_1,\ldots,x_n,u(x_1,\ldots,x_n))\cdot g(x_1,\ldots,x_n,u(x_1,\ldots,x_n))=$$

$$\frac{\partial v}{\partial u}(x_1,...,x_n,u(x_1,...,x_n))\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}(x_1,...,x_n)\cdot f_k(x_1,...,x_n,u(x_1,...,x_n)).$$

Ţinem seamă de faptul că $\frac{\partial v}{\partial u}(x_1,...,x_n,u(x_1,...,x_n))\neq 0$ deducem egalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}(x_1,...,x_n)\cdot f_i(x_1,...,x_n,u(x_1,...,x_n))=g(x_1,...,x_n,u(x_1,...,x_n)).$$

Rezultă în acest fel că funcţia $u=u(x_1,\ldots,x_n)$ este soluţie a ecuaţiei (5.3). Teorema arată că rezolvarea ecuaţiilor cvasiliniare cu derivate parţiale de ordinul întâi se reduce la rezolvarea ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare.

Definiţia 5.2.3 *Pentru $(x_1^0,\ldots,x_n^0)\in\Omega$ problema găsirii unei soluţii $u(x_1,\ldots,x_n)$ a ecuaţiei (5.3) astfel încât*

$$u(x_1^0,x_2,\ldots,x_n)=\xi(x_2,\ldots,x_n),$$

ξ fiind o funcţie dată de clasă C^1 se numeşte problemă Cauchy pentru ecuaţia (5.3).

Teorema 5.2.2 *Dacă $f_1(x_1^0,\ldots,x_n^0,\xi(x_2^0,\ldots,x_n^0))\neq 0$, atunci există o vecinătate deschisă V a punctului $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ şi o soluţie $u=u(x_1,...,x_n)$ a ecuaţiei (5.3) definită pe V astfel încât*

$$u(x_1^0,x_2,\ldots,x_n)=\xi(x_2,\ldots,x_n).$$

Demonstraţie: Există n soluţii $v_1,v_2,\ldots,v_n$ ale ecuaţiei (5.4) definite pe o vecinătate a punctului $(x_1^0,\ldots,x_n^0,\xi(x_2^0,\ldots,x_n^0))$ astfel încât

$$v_k(x_1^0,x_2,\ldots,x_n,u)=x_{k+1},\quad k=1,2,\ldots,n-1$$

şi

$$v_n(x_1^0, x_2, \ldots, x_n, u) = u.$$

Funcţia v definită prin:

$$v(x_1, \ldots, x_n, u) = v_n(x_1, \ldots, x_n, u) -$$

$$-\xi(v_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, v_{n-1}(x_1, \ldots, x_n, u))$$

este soluţie a ecuaţiei (5.4) (este obţinută ca funcţie de cele n integrale prime independente) şi

$$v(x_1^0, x_2, \ldots, x_n, u) = u - \xi(x_2, \ldots, x_n).$$

Din teorema funcţiilor implicite rezultă că există o vecinătate V a punctului $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ şi o funcţie $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ de clasă C^1 definită pe această vecinătate astfel încât

$$v(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0.$$

Deoarece

$$\frac{\partial v}{\partial u}(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) \neq 0$$

din teorema precedentă rezultă că $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ este soluţie a ecuaţiei (5.3).

Avem:

$$v(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) -$$

$$-\xi(v_1(x_1, ..., x_n, u(x_1, ..., x_n)), \ldots, v_{n-1}(x_1, ..., x_n, u(x_1, ..., x_n)) \equiv 0$$

deci în x_i avem:

$$u(x_1^0, x_2, \ldots, x_n) - \xi(x_2, \ldots, x_n) \equiv 0.$$

Observaţia 5.2.1 O ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi de forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot f_i = g \tag{5.5}$$

se numeşte ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi neomogenă. Această denumire se datorează faptului că pentru $g = 0$ ecuaţia (5.5) este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară (şi omogenă). În ecuaţia (5.5), funcţiile $f_1, \ldots, f_n$ şi g sunt funcţii de clasă C^1 şi depind de variabilele $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$.

Ecuaţia (5.5) se rezolvă ca şi ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniare.

Exerciţii:

1. Rezolvaţi următoarele ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi cvasiliniare:

a) $$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot (1+\sqrt{u-x-y}) + \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

$$\textbf{R:}\ \gamma(u-2y,\, y+2\sqrt{u-x-y}) = 0$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = m \cdot u$$

$$\textbf{R:}\ \gamma\left(\frac{x_1}{x_n},\, \frac{x_2}{x_n},\, \ldots,\, \frac{x_{n-1}}{x_n},\, \frac{u}{x_n^m}\right) = 0$$

c) $$xy \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + x(1+x^2) = 0$$

$$\textbf{R:}\ \gamma\left(xy\,u + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4},\, xy\right) = 0$$

d) $$2y^4 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - xy \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x\sqrt{u^2+1}$$

$$\textbf{R:}\ \gamma\left(x^2+y^4,\, y\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\right) = 0$$

2. Rezolvaţi următoarele probleme Cauchy:

a) $$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y-x}{u}, \quad u(1,y) = y^2$$

$$\textbf{R:}\ u^2(x,y,z) = (x+y-1)^4 + 2xy - 2(x+y-1)$$

b) $$xy \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad u(1,y) = \frac{3}{2y}$$

$$\textbf{R:}\ u(x,y) = \frac{x^2+2}{2xy}$$

$c)\quad u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + (u^2 - x^2) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + x = 0, \quad u(x, x^2) = 2x$

R: $y^2 + u^2(x,y) = 5\,(x \cdot u(x,y) - y)$

5.3 Calculul simbolic al soluţiilor ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întâi

Pentru calculul simbolic al soluţiilor ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întâi *Maple* foloseşte funcţia *pdsolve* (find solutions for partial differential equations (PDEs) and systems of PDEs) cu una din următoarele sintaxe :

pdsolve(PDE, f, INTEGRATE, build);

pdsolve(PDE system, funcs, other options);

în care:

PDE	- ecuaţia cu derivate parţiale pe care dorim să o rezolvăm
f	- numele funcţiei necunoscute (implică existenţa derivatelor parţiale ale mai multor funcţii)
$INTEGRATE$	-(opţional) indică integrarea automată a ecuaţiilor diferenţiale ordinare care intervin atunci când PDE este rezolvată cu metoda separării variabilelor
build	- (opţional) indică afişarea unei forme explicite (dacă este posibil) a soluţiei

Pentru exemplificare, considerăm ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară:

$$y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{5.6}$$

Cu instrucţiunea *pdsolve* se obţine soluţia generală (toate soluţiile) a ecuaţiei:

```
> PDE1 := y*diff(u(x,y),x)-x*diff(u(x,y),y) = 0;
```

$$PDE1 := y\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) - x\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = 0$$

```
> pdsolve(PDE1);
```

$$u(x,y) = _F1(x^2 + y^2)$$

Se observă că, soluţia generală este afişată cu ajutorul unei funcţii $F1$ care poate fi orice funcţie de clasă C^1. Pentru determinarea unei anumite soluţii avem nevoie de o condiţie iniţială, dar în sintaxa funcţiei *pdsolve* prezentată anterior nu există nici un parametru care să specifice utilizarea acesteia.

În cele ce urmează, vom mai determina soluţia generală pentru o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi în care funcţia necunoscută este de trei variabile x, y, z:

$$\sqrt{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{5.7}$$

```
>  PDE3 :=sqrt(x)*diff(u(x,y,z),x)+sqrt(y)*diff(u(x,y,z),y)+
           sqrt(z)*diff(u(x,y,z),z) = 0;
```

$$PDE3 := \sqrt{x}\frac{\partial}{\partial x}u\left(x,y,z\right) + \sqrt{y}\frac{\partial}{\partial y}u\left(x,y,z\right) + sqrtz\frac{\partial}{\partial z}u\left(x,y,z\right) = 0$$

```
>  pdsolve(PDE3);
```

$$u\left(x,y,z\right) = _F1\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}, \sqrt{z}-\sqrt{y}\right)$$

Capitolul 6

Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea liniare

6.1 Clasificarea ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea liniare (clasificarea problemelor de fizică - matematică)

Definiţia 6.1.1 *O ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea liniară este o relaţie de dependenţă funcţională de forma:*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}+c\cdot u+f=0 \tag{6.1}$$

dintre funcţia necunoscută $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, derivatele parţiale de ordinul întâi şi de ordinul al doilea ale acesteia.
Funcţiile $a_{ij}, b_i, c, f : \Omega \subset I\!R^n \to I\!R^1$ din ecuaţia (6.1) se consideră cunoscute şi sunt presupuse cel puţin continue pe Ω.

Definiţia 6.1.2 *O soluţie clasică a ecuaţiei (6.1) este o funcţie $u : D \subset \Omega \to I\!R^1$ de clasă C^2 care are proprietatea că pentru orice $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ avem:*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\ldots,x_n)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(x_1,\ldots,x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)+$$

$$+c(x_1,\ldots,x_n)\cdot u(x_1,\ldots,x_n)+f(x_1,\ldots,x_n)=0.$$

Fie $T:\Omega\to\Omega'$ un difeomorfism de clasă C^2 de componente $\xi_k=\xi_k(x_1,\ldots,x_n), k=\overline{1,n}$ şi $u=u(x_1,\ldots,x_n)$ o soluţie a ecuaţiei (6.1). Considerăm funcţia $v=u\circ T^{-1}$ şi din derivarea funcţiilor compuse obţinem:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial \xi_k}\cdot\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi_k\partial\xi_l}\cdot\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial\xi_k}\cdot\frac{\partial^2\xi_k}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Înlocuind derivatele în ecuaţia (6.1) obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\overline{a}_{kl}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_k\partial x_l}+\sum_{k=1}^{n}\overline{b}_k\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi_k}+c\cdot v+f=0 \tag{6.2}$$

unde:

$$\overline{a}_{kl}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j}$$

$$\overline{b}=\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot\frac{\partial^2\xi_k}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Ecuaţia (6.2) este echivalentă cu ecuaţia (6.1), soluţiile u ale ecuaţiei (6.1) obţinându-se din soluţiile v ale ecuaţiei (6.2) cu formula $u=v\circ T$.
Pe de altă parte într-un punct oarecare, fixat $(x_1^0,\ldots,x_n^0)\in\Omega$ putem considera forma pătratică

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^0\cdot y_i\cdot y_j$$

unde $a_{ij}^0=a_{ij}(x_1^0,\ldots,x_n^0)$. Prin schimbarea de variabile

$$y_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_k}\cdot\eta_k$$

forma pătratică considerată se transformă în forma pătratică:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^0\cdot\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j}\right)\eta_k\eta_l=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\overline{a}_{kl}\cdot\eta_k\eta_l.$$

Prin urmare, coeficienţii derivatelor parţiale de ordinul al doilea se schimbă la fel cu coeficienţii formei pătratice sub acţiunea transformării liniare:

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \cdot \eta_k.$$

Se ştie că, prin alegerea unei transformări liniare adecvate, forma pătratică se aduce la forma canonică (adică matricea a^0_{ij} poate fi adusă la forma diagonală: $|\overline{a}^0_{ii}| = 1$ sau 0 şi, $\overline{a}^0_{ij} = 0$ dacă $i \neq j$). Aceasta înseamnă că alegând în mod adecvat transformarea $\xi_k = \xi_k(x_1, ..., x_n)$, $k = \overline{1, n}$, coeficienţii derivatelor parţiale $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2}$ în punctul $\xi_k = \xi_k(x^0_1, ..., x^0_n)$, $k = \overline{1, n}$ vor fi egali cu $+1, -1$ sau 0, iar coeficienţii derivatelor parţiale $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi_k \partial \xi_l}$ vor fi nuli.
Conform legii inerţiei, numărul coeficienţilor $\overline{a}^0_{ii}$ pozitivi, negativi sau nuli nu depinde de transformarea liniară care aduce forma pătratică la forma canonică. Aceasta permite să dăm următoarea definiţie:

Definiţia 6.1.3

i) Zicem că ecuaţia (6.1) este eliptică în punctul $(x^0_1, \ldots, x^0_n)$ dacă toţi cei n coeficienţi $\overline{a}^0_{ii}$ sunt de acelaşi semn.
ii) Zicem că ecuaţia (6.1) este hiperbolică în punctul $(x^0_1, \ldots, x^0_n)$ dacă $(n-1)$ coeficienţi $\overline{a}^0_{ii}$ au acelaşi semn şi unul din coeficienţi are semn contrar.
iii) Zicem că ecuaţia (6.1) este ultra-hiperbolică în punctul $(x^0_1, \ldots, x^0_n)$ dacă printre coeficienţii $\overline{a}^0_{ii}$ există m coeficienţi de un semn şi $n - m$ coeficienţi de semn contrar.
iv) Zicem că ecuaţia (6.1) este parabolică dacă cel puţin unul din coeficienţii $\overline{a}^0_{ii}$ este nul.

Observaţia 6.1.1 În acord cu definiţia anterioară, ecuaţia (6.1) are una dintre următoarele forme standard:

i) Ecuaţie de tip eliptic în $(x^0_1, \ldots, x^0_n)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^n} + \Phi = 0; \qquad (6.3)$$

ii) Ecuaţie de tip hiperbolic în $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} + \Phi; \tag{6.4}$$

iii) Ecuaţie de tip ultra-hiperbolic în $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} = \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} + \Phi; \tag{6.5}$$

iii) Ecuaţie de tip parabolic:

$$\sum_{i=1}^{n-m} \left(\pm \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} \right) + \Phi = 0, \ (m > 0). \tag{6.6}$$

Tipul ecuaţiei (6.1) în $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ se determină prin aducerea formei pătratice:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 \, y_i \, y_j$$

la forma canonică. Ecuaţia poate fi adusă la una din formele standard prezentate alegând transformarea $\xi_k = \xi_k(x_1, \ldots, \xi_n), k = \overline{1, n}$ astfel încât transformarea liniară:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} (x_1^0, \ldots, x_n^i) \cdot \eta_k$$

să aducă forma pătratică la forma canonică.

Să examinăm în continuare problema posibilităţii aducerii ecuaţiei (6.1) la ”forma canonică” (una din formele prezentate) într-o vecinătate a unui punct $(x_1, \ldots, x_n)$, în condiţiile în care în toate punctele acestei vecinătăţi ecuaţia aparţine aceluiaşi tip.
Pentru a aduce ecuaţia (6.1) la forma canonică într-un anumit domeniu ar trebui, în primul rând, să impunem funcţiilor $\xi_k(x_1 \ldots, x_n), k = \overline{1, n}$ condiţiile diferenţiale $\overline{a}_{kl} = 0$ pentru $k \neq l$. Numărul acestor condiţii este $\dfrac{n(n-1)}{2}$ şi este mai mic decât n (n reprezintă numărul funcţiilor $\xi_k, k = \overline{1, n}$) dacă $n < 3$. De aceea pentru $n > 3$ ecuaţia (6.1) nu poate fi adusă la forma

canonică în vecinătatea unui punct $(x_1, \ldots, x_n)$.
Pentru $n = 3$ elementele nediagonale ar putea fi anulate în general, însă elementele diagonale ar putea fi diferite de ±1,0. Deci, nici în acest caz, ecuaţia (6.1) nu poate fi adusă la forma canonică în vecinătatea unui punct.
Doar pentru $n = 2$, putem anula unicul coeficient nediagonal şi satisface condiţia de egalitate a celor doi coeficienţi diagonali. Aceasta înseamnă că doar în cazul $n = 2$ putem aduce ecuaţia cu derivate parţiale la forma canonică pe o vecinătate.

Exerciţii

1. Aduceţi la forma canonică ecuaţia:

$$a_{11} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + c \cdot u + f(x, y) = 0$$

unde a_{ij}, b_i, c sunt constante.

R: Scriind ecuaţia caracteristică asociată:

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12} \left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0$$

se obţine discriminantul: $\Delta = (a_{12})^2 - a_{11} \cdot a_{22}$.

- dacă $\Delta > 0$ *(cazul ecuaţiei hiperbolice)*, atunci ecuaţia caracteristică are două rădăcini reale:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_{12} + \sqrt{(a_{12})^2 - a_{11} \cdot a_{22}}}{a_{11}} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_{12} - \sqrt{(a_{12})^2 - a_{11} \cdot a_{22}}}{a_{11}} \end{cases}$$

  Se rezolvă aceste ecuaţii diferenţiale ordinare şi se obţine $f(x, y) = c_1$, respectiv $g(x, y) = c_2$.
  Schimbarea de variabile care ne va duce la forma canonică va fi:

$$\begin{cases} \xi(x, y) = f(x, y) \\ \eta(x, y) = g(x, y). \end{cases}$$

- dacă $\Delta = 0$ *(cazul ecuaţiei parabolice)*, atunci ecuaţia caracteristică are două rădăcini reale egale:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}.$$
Rezolvând această ecuaţie diferenţială ordinară se obţine $f(x, y) = c_1$ care ne va conduce la schimbarea de variabilă $\xi(x, y) = f(x, y)$. Pentru $\eta(x, y)$ se alege convenabil o funcţie $g(x, y)$ astfel încât să fie îndeplinite proprietăţile schimbării de variabile, de exemplu:
$$\begin{cases} \xi(x, y) = f(x, y) \\ \eta(x, y) = x \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi(x, y) = f(x, y) \\ \eta(x, y) = y. \end{cases}$$

- dacă $\Delta < 0$ *(cazul ecuaţiei eliptice)*, atunci ecuaţia caracteristică are două rădăcini complexe:
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_{12}}{a_{11}} + i\sqrt{a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12})^2} \\ \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_{12}}{a_{11}} - i\sqrt{a_{11} \cdot a_{22} - (a_{12})^2} \end{cases}$$
Rezolvând aceste ecuaţii diferenţiale ordinare se obţin $\alpha(x, y) \pm i\beta(x, y) = \tau$ care ne va conduce la schimbarea de variabilă:
$$\begin{cases} \xi(x, y) = \alpha(x, y) \\ \eta(x, y) = \beta(x, y). \end{cases}$$

2. Să se găsească domeniile de elipticitate, hiperbolicitate şi parabolicitate ale ecuaţiei:
$$y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

R: Deoarece $\Delta = b^2 - ac = -xy$ avem că:

- ecuaţia este de tip hiperbolic ($\Delta > 0$) în cadranele II şi IV;

- ecuaţia este de tip eliptic ($\Delta < 0$) în cadranele I şi III.

3. Să se aducă la forma canonică ecuaţiile:

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

R: Ecuaţia este de tip parabolic $(\Delta = 0)$; forma canonică este: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0;$

b) $x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \cdot y^2 \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y^2} = 0, \ x, y > 0$

R: Ecuaţia este de tip hiperbolic $(\Delta > 0)$; forma canonică este:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{3}{8} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0;$$

c) $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \cdot y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ x, y > 0$

R: Ecuaţia este de tip eliptic $(\Delta < 0)$; forma canonică este:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0;$$

6.2 Formulele lui Green şi formule de reprezentare în două dimensiuni

În acest paragraf prezentăm câteva rezultate de calcul diferenţial şi integral pentru funcţii de două variabile, care intervin frecvent în rezolvarea E.D.P în două dimensiuni.

Teorema 6.2.1 *(legătura dintre integrala dublă pe un domeniu mărginit în* $I\!R^2$ *şi integrala curbilinie pe frontiera acestuia)*
Dacă Ω *este un domeniu mărginit în* $I\!R^2$ *cu frontiera* $\partial\Omega$ *netedă (parţial netedă), iar funcţiile* $P, Q : \overline{\Omega} \to I\!R^1$ *sunt continue pe* $\overline{\Omega}$ *şi de clasă* C^1 *în* Ω*, atunci are loc următoarea egalitate:*

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} (P \cdot \cos\alpha_1 + Q \cdot \cos\alpha_2) ds \tag{6.7}$$

în care: α_i *este unghiul dintre versorul* $\overline{n}$ *al normalei exterioare la* $\partial\Omega$ *şi axa* $\overline{e}_i$*, iar* ds *este măsura elementului de arc pe curba* $\partial\Omega$*.*

Demonstraţie: Această teoremă este obiectul cursului de analiză matematică din anul I. Aici redăm doar cîteva idei din demonstraţia acestei teoreme. Mai întâi, reamintim că egalitatea (6.7) se obţine prin adunarea egalităţilor:

$$\begin{aligned} &\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} P \cdot \cos\alpha_1 \cdot ds \\ &\iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} Q \cdot \cos\alpha_2 \cdot ds \end{aligned} \tag{6.8}$$

şi prin urmare demonstraţia egalităţii (6.7) revine la demonstraţia egalităţilor (6.8).

Prima dintre egalităţile (6.8) se obţine calculând integrala dublă ca o integrală iterată şi interpretând apoi cele obţinute ca o integrală curbilinie. Astfel avem:

$$\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_c^d \left(\int_{x_1^-(x_2)}^{x_1^+(x_2)} \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 =$$

$$= \int_c^d \left[P(x_1^+(x_2), x_2) - P(x_1^-(x_2), x_2)\right] dx_2$$

în care intervin curbele:

$$\Gamma^+ : \begin{cases} x_1 = x_1^+(x_2) \\ x_2 = x_2 \end{cases} \qquad \Gamma^- : \begin{cases} x_1 = x_1^-(x_2) \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

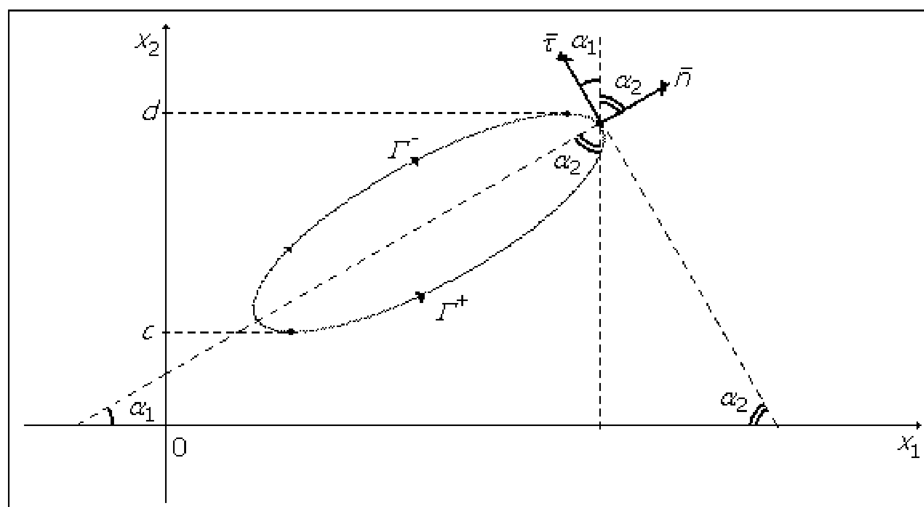


Figura 29. Ilustrarea elementelor ce intervin in formula lui Green

Pe figură se vede că avem

$$\cos\alpha_1 = \cos\sphericalangle(\tau, Ox_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx_1^+}{dx_2}\right)^2}}$$

şi rezultă astfel în continuare:

$$\int_c^d \left[P(x_1^+(x_2), x_2) - P(x_1^-(x_2), x_2)\right] dx_2 =$$

$$= \int_c^d P(x_1^+(x_2), x_2) \cdot \cos\alpha_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx_1^+}{dx_2}\right)^2} dx_2 +$$

$$+\int_c^d P(x_1^-(x_2), x_2) \cdot \cos\alpha_1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx_1^-}{dx_2}\right)^2} dx_2 = \int_{\partial\Omega} P\cos\alpha_1 ds$$

A doua egalitate din (6.8) se obţine asemănător.

Teorema 6.2.2 *(de integrare prin părţi)*
Dacă Ω este un domeniu mărginit în $I\!R^2$ şi frontiera $\partial\Omega$ a lui Ω este netedă (parţial netedă), iar $P, Q : \overline{\Omega} \to I\!R^1$ sunt funcţii continue pe $\overline{\Omega}$ şi de clasă C^1 în Ω atunci au loc egalităţile:

$$\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_i} \cdot Q dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} P \cdot Q \cdot \cos\alpha_i ds - \iint_\Omega P\frac{\partial Q}{\partial x_i} dx_1 dx_2,\ i = \overline{1,2} \quad (6.9)$$

Demonstraţie: Pe de o parte avem:

$$\iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (P \cdot Q) dx_1 dx_2 = \iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_i} \cdot Q dx_1 dx_2 + \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x_i} \cdot P dx_1 dx_2,$$

iar pe de altă parte avem:

$$\iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (P \cdot Q) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} P \cdot Q \cdot \cos\alpha_i \cdot ds.$$

Prin egalare rezultă egalitatea:

$$\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_i} \cdot Q dx_1 dx_2 + \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x_i} \cdot P dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} P \cdot Q \cos\alpha_i \cdot ds$$

de unde rezultă (6.9).

Teorema 6.2.3 *(prima formulă a lui Green)*
Dacă Ω este un domeniu mărginit în $I\!R^2$ şi frontiera $\partial\Omega$ a lui Ω este netedă (parţial netedă), iar funcţiile $P, Q : \overline{\Omega} \to I\!R^1$ sunt de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$ şi de clasă C^2 în Ω atunci are loc următoarea egalitate:

$$\iint_\Omega P\Delta Q dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} P \cdot \frac{\partial Q}{\partial \overline{n}} ds - \iint_\Omega \nabla P \cdot \nabla Q dx_1 dx_2 \quad (6.10)$$

Demonstraţie: În formula (6.10): ΔQ reprezintă Laplacianul funcţiei Q adică:

$$\Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2},$$

iar $\frac{\partial Q}{\partial \overline{n}}$ este derivata normală definită pe $\partial\Omega$ prin:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial \overline{n}} &= \frac{\partial Q}{\partial x_1}\cdot n_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2}\cdot n_2 = \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x_1}\cdot \cos\alpha_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2}\cdot \cos\alpha_2\end{aligned}$$

$\cos\alpha_i =< \overline{n}, \overline{e_i} >= n_i$, $i = 1, 2$; ∇P şi ∇Q sunt funcţiile vectoriale (gradienţii funcţiilor P şi Q) definite prin:

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial x_1}\cdot \overline{e_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2}\cdot \overline{e_2}$$

$$\nabla Q = \frac{\partial Q}{\partial x_1}\cdot \overline{e_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2}\cdot \overline{e_2}.$$

Pentru demonstraţie se calculează membrul stâng al egalităţii (6.10) ţinând seama de formula de integrare prin părţi (6.9) şi se obţine:

$$\begin{aligned}\iint_\Omega P\cdot \Delta Q dx_1dx_2 &= \iint_\Omega P\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right)\right] dx_1dx_2 = \\ &= \int_{\partial\Omega} P\cdot\cos\alpha_1\cdot\frac{\partial Q}{\partial x_1}ds - \iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_1dx_2 + \\ &+ \int_{\partial\Omega} P\cdot\cos\alpha_2\cdot\frac{\partial Q}{\partial x_2}ds - \iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x_2}dx_1dx_2 = \\ &= \int_{\partial\Omega} P\cdot\left[\frac{\partial Q}{\partial x_1}\cdot\cos\alpha_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2}\cdot\cos\alpha_2\right] ds - \\ &- \iint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_1dx_2 + \frac{\partial P}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right) dx_1dx_2 = \\ &= \int_{\partial\Omega} P\cdot\left[\frac{\partial Q}{\partial x_1}\cdot\cos\alpha_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2}\cdot\cos\alpha_2\right] ds - \\ &- \iint_\Omega \nabla P\cdot\nabla Q dx_1dx_2 =\end{aligned}$$

$$= \int_{\partial\Omega} P \cdot \frac{\partial Q}{\partial \overline{n}} ds - \iint_{\Omega} \nabla P \cdot \nabla Q dx_1 dx_2.$$

Teorema 6.2.4 *(cea de-a doua formulă a lui Green)*
Dacă Ω este un domeniu mărginit în $I\!R^2$ cu frontiera $\partial\Omega$ netedă (parţial netedă), iar funcţiile $P, Q : \overline{\Omega} \to I\!R^1$ sunt de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$ şi de clasă C^2 în Ω atunci are loc următoarea egalitate:

$$\iint_{\Omega} (P\Delta Q - Q\Delta P) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \left(P \cdot \frac{\partial Q}{\partial \overline{n}} - Q \cdot \frac{\partial P}{\partial \overline{n}} \right) ds. \tag{6.11}$$

Demonstraţie: Egalitatea (6.11) se obţine scriind egalitatea (6.10) pentru funcţiile $P \cdot \nabla Q$ şi $Q \cdot \nabla P$ după care se face diferenţa acestora.

Teorema 6.2.5 *(de reprezentare a unei funcţii de două variabile)*
Dacă Ω este un domeniu mărginit în $I\!R^2$ cu frontiera $\partial\Omega$ netedă (parţial netedă) şi funcţia $u : \overline{\Omega} \to I\!R^1$ este de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$ şi de clasă C^2 în Ω atunci pentru orice $X = (x_1, x_2) \in \Omega$ are loc următoarea egalitate:

$$\begin{aligned} u(X) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \ln \frac{1}{\|X - Y\|} \cdot \Delta u(Y) dy_1 dy_2 + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \ln \frac{1}{\|X - Y\|} \cdot \frac{\partial u}{\partial \overline{n}_Y}(Y) ds_Y - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} u(Y) \cdot \frac{\partial}{\partial \overline{n}_Y} \left(\ln \frac{1}{\|X - Y\|} \right) ds_Y. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Demonstraţie: Funcţia

$$E(X) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|X\|}$$

definită pentru orice $X \in I\!R^2$, $X \neq 0$ este de clasă C^2 pe $I\!R^2 \setminus \{0\}$ şi are proprietatea $\Delta E = 0$. Pentru $X \in I\!R^2$, X-fixat considerăm funcţia:

$$E(X - Y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|X - Y\|}$$

definită pentru orice $Y \in I\!R^2 \setminus \{X\}$. Această funcţie de Y este de clasă C^2 şi are proprietatea $\Delta_Y E(X - Y) = 0$. De asemenea, pentru orice $Y \in I\!R^2$,

Y-fixat funcţia $E(X-Y) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\|X-Y\|}$ definită pentru orice $X \in \mathbb{R}^2, X \neq Y$ este de clasă C^2 şi verifică $\Delta_X E(X-Y) = 0$.
Considerăm $X \in \Omega$, X-fixat şi $\varepsilon > 0$ astfel ca, pentru orice Y cu $\|X-Y\| \leq \varepsilon$, să avem $Y \in \Omega$. Notăm cu $\overline{B}(X,\varepsilon)$ discul centrat în X de rază ε:

$$\overline{B}(X,\varepsilon) = \{Y : \|X-Y\| \leq \varepsilon\}$$

şi domeniul $\Omega_\varepsilon = \Omega - \overline{B}(X,\varepsilon)$. Considerăm funcţiile

$$Y \longmapsto u(Y) \text{ şi } Y \longmapsto -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\|X-Y\|} = E(X-Y).$$

Pe domeniul Ω_ε, ambele funcţii sunt de clasă C^2, iar pe $\overline{\Omega}_\varepsilon$ sunt de clasă C^1. Scriem cea de-a doua formulă a lui Green pentru aceste funcţii şi obţinem:

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega_\varepsilon}\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\cdot(\Delta u)(Y)dy_1dy_2 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\overline{n}_Y}(Y)ds_Y +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}u(Y)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{n}_Y}\left(\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\right)\cdot ds_Y.$$

Frontiera $\partial\Omega_\varepsilon$ a mulţimii Ω_ε are două părţi: $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon$ unde $S_\varepsilon = \{Y : \|Y-X\| = \varepsilon\}$, astfel că integralele din membru drept al acestei egalităţi se pot scrie după cum urmează:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\overline{n}_Y}(Y)ds_Y =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\overline{n}_Y}ds_Y - \frac{1}{2\pi}\int_{S_\varepsilon}\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\overline{n}_Y}ds_Y =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\overline{n}_Y}(Y)ds_Y + \frac{1}{2\pi}\ln\varepsilon\cdot 2\pi\varepsilon\cdot\frac{\partial n}{\partial\overline{n_Y}}(Y^*).$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(Y)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{n}_Y}\left(\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\right)ds_Y =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} u(Y)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{n}_Y}\left(\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\right)ds_Y +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{S_\varepsilon} u(Y)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{n}_Y}\left(\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\right)ds_Y =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} u(Y)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{n}_Y}\left(\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\right)\cdot ds_Y +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{S_\varepsilon} u(Y)\cdot\left[\frac{x_1-y_1}{\|X-Y\|^2}\cdot\cos\alpha_1+\frac{x_2-y_2}{\|X-Y\|^2}\cdot\cos\alpha_2\right]ds_Y =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} u(Y)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{n}_Y}\left(\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\right)\cdot ds_Y +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{S_\varepsilon} u(Y)\cdot\left[\frac{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}{\|X-Y\|^3}\right]ds_Y =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} u(Y)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{n}}\left(\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\right)ds_Y +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S_\varepsilon} u(Y)\cdot\frac{1}{\|X-Y\|}ds_Y =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} u(Y)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{n}_Y}\left(\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\right)ds_Y+\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{S_\varepsilon} u(Y)ds_Y$$

Pentru $\varepsilon \longmapsto 0$ rezultă:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\overline{n}_Y}u(Y)ds_Y =$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\overline{n}_Y}u(Y)ds_Y.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} u(Y)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{n}_Y}\left(\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\right)ds_Y =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} u(Y)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{n}_Y}\left(\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\right)ds_Y + u(X).$$

Rezultă de aici că avem:

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\cdot(\Delta u)(Y)dy_1dy_2 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\overline{n}_Y}(Y)ds_Y +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}u(Y)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{n}_Y}\left(\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\right)ds_Y + u(X),$$

sau

$$\begin{aligned} u(X) &= -\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\cdot(\Delta u)(Y)dy_1dy_2 + \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\overline{n}_Y}(Y)ds_Y - \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}u(Y)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{n}_Y}\left(\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\right)ds_Y \end{aligned}$$

Comentariu: Această formulă de reprezentare permite determinarea funcţiei u în toate punctele lui Ω cunoscând următoarele elemente: Laplacianul funcţiei u pe Ω, valorile derivatei normale $\dfrac{\partial u}{\partial\overline{n}}$ pe frontiera $\partial\Omega$ şi valorile funcţiei u pe frontiera $\partial\Omega$.

Vom arăta în continuare importanţa acestei formule de reprezentare pentru cazul funcţiilor armonice.

Definiţia 6.2.1 *Zicem că o funcţie* $u : \Omega \to I\!R^1$ *este armonică în* Ω *dacă funcţia* u *este de clasă* C^2 *şi* $\Delta u = 0$, $(\forall)(x_1, x_2) \in \Omega$ *unde* Δu *reprezintă Laplacianul funcţiei u:*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Observaţia 6.2.1 În condiţiile din teorema de reprezentare (6.2.5) dacă funcţia u este armonică în Ω şi de clasă C^1 pe $\bar{\Omega}$ atunci avem:

$$\begin{aligned} u(X) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} \ln\frac{1}{\|X-Y\|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\overline{n}_Y}(Y)ds_Y - \\ &- \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} u(Y)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{n}_Y}\left(\ln\frac{1}{\|X-Y\|}\right)ds_Y \end{aligned}$$

Teorema 6.2.6 *(de reprezentare a funcţiilor armonice)*
Dacă $u : \overline{\Omega} \subset I\!R^2 \to I\!R^1$ *este o funcţie armonică pe domeniul* Ω *atunci* $(\forall)X \in \Omega$ *şi* $(\forall)r > 0$ *pentru care discul:*

$$\overline{B}(X,r) = \{Y : \|Y - X\| \le r\}$$

este inclus în Ω, *are loc egalitatea:*

$$u(X) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\overline{B}(X,r)} u(Y)ds_Y \qquad (6.13)$$

Demonstraţie: Scriind formula de reprezentare (6.12) pentru funcţia armonică u pe $\overline{B}(X,r)$ se obţine egalitatea:

$$u(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\overline{B}(X,r)} \ln\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\overline{n}_Y}(Y)ds_Y + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\overline{B}(X,r)} u(Y)\cdot\frac{1}{r}ds_Y$$

sau

$$u(X) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial\overline{B}(X,r)} u(Y)ds_Y + \frac{1}{2\pi}\cdot\ln\frac{1}{r}\int_{\partial\overline{B}(X,r)} \frac{\partial u}{\partial\overline{n}_Y}(Y)ds_Y.$$

Arătăm în continuare că

$$\int_{\partial\overline{B}(X,r)} \frac{\partial u}{\partial\overline{n}_Y}(Y)ds_Y = 0.$$

Pentru aceasta, considerăm pe discul $\overline{B}(X,r)$ funcţiile $P \equiv 1$ şi $Q = u$ şi aplicăm prima formulă a lui Green:

$$\iint_{\overline{B}(X,r)} P \cdot \Delta Q dy_1 dy_2 = \int_{\partial \overline{B}(X,r)} P \cdot \frac{\partial Q}{\partial \overline{n}_Y} ds_Y - \int_{B(X,r)} \nabla P \cdot \nabla Q dy_1 dy_2$$

de unde se obţine:

$$0 = \int_{\partial \overline{B}(X,r)} P \cdot \frac{\partial Q}{\partial \overline{n}_Y} ds_Y = \int_{\partial \overline{B}(X,r)} \frac{\partial u}{\partial \overline{n}_Y} ds_Y.$$

Observaţia 6.2.2 Din demonstraţie rezultă că integrala derivatei normale a unei funcţii armonice pe un cerc este zero:

$$\int_{\partial \overline{B}(X,r)} \frac{\partial u}{\partial \overline{n}_Y}(Y) ds_Y = 0.$$

Acest rezultat se poate generaliza.

Consecinţa 6.2.1 *Dacă u este o funcţie armonică de clasă C^2 pe Ω şi este de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$, atunci are loc egalitatea:*

$$\int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \overline{n}_Y}(Y) ds_Y = 0.$$

Demonstraţie: Pentru a demonstra această egalitate se aplică prima formulă a lui Green în cazul funcţiilor $P \equiv 1$ şi $Q = u$:

$$\iint_{\Omega} P \cdot \Delta Q dx_1 dx_2 = \int_{\partial \Omega} P \cdot \frac{\partial Q}{\partial \overline{n}_Y} ds_Y - \iint_{\Omega} \nabla P \cdot \nabla Q dx_1 dx_2$$

adică

$$0 = \iint_{\Omega} 1 \cdot \Delta u dx_1 dx_2 = \int_{\partial \Omega} 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial \overline{n}_Y} ds_Y - \iint_{\Omega} \nabla 1 \cdot \nabla u dx_1 dx_2 = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \overline{n}_Y} ds_Y.$$

O altă proprietate importantă a funcţiilor armonice se referă la localizarea punctelor în care aceste funcţii îşi ating extremele:

Teorema 6.2.7 *(teorema de extrem a funcţiilor armonice)*
Dacă $\Omega \in I\!R^2$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ netedă şi funcţia armonică $u : \overline{\Omega} \to I\!R^1$ este de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$, atunci u este constantă pe $\overline{\Omega}$ sau îşi atinge extremele pe frontiera $\partial\Omega$.

Demonstraţie: Presupunem că funcţia u nu este constantă pe $\overline{\Omega}$ şi dorim să arătăm că u îşi atinge extremele pe $\partial\Omega$. Raţionăm prin reducere la absurd şi admitem că, există $X^0 \in \Omega$ astfel încât oricare ar fi $X \in \overline{\Omega}$ avem
$u(X) \leq u(X^0)$.
Considerăm $r_0 > 0$ astfel încât

$$\overline{B}(X^0, r_0) = \{Y : \|Y - X^0\| \leq r_0\} \subset \Omega$$

şi arătăm că u este constant egală cu $u(X^0)$ pe $\overline{B}(X^0, r_0)$.
Dacă u nu ar fi constant egală cu $u(X^0)$ pe $\overline{B}(X^0, r_0)$ atunci ar exista $X^1 \in \overline{B}(X^0, r_0)$ astfel încât $u(X^1) < u(X^0)$. Pentru X^1, există $r_1 > 0$ astfel încât pentru orice $X \in \overline{B}(X^1, r_1)$ avem:

$$u(X) < \frac{1}{2}\left[u(X^0) + u(X^1)\right].$$

Putem admite că $r_1 < \min\{r_0 - \|X^1 - X^0\|, \|X^1 - X^0\|\}$ şi considerăm numărul $\rho = \|X^1 - X^0\| > 0$. Aplicăm formula de reprezentare a lui $u(X^0)$ pe $\partial\overline{B}(X^0, \rho)$ şi găsim:

$$u(X^0) = \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\partial\overline{B}(X^0,\rho)} u(Y)ds_Y.$$

Frontiera $\partial\overline{B}(X^0, \rho)$ se descompune astfel:

$$\partial\overline{B}(X^0, \rho) = \partial\overline{B}(X^0, \rho) \cap \overline{B}(X^1, r_1) \cup \overline{B}(X^0, \rho) \cap (\Omega \setminus \overline{B}(X^1, r_1)) = \sigma_1 \cup \sigma_2$$

şi cu această descompunere formula de reprezentare devine:

$$\begin{aligned} u(X^0) &= \frac{1}{2\pi\rho}ds\int_{\sigma_1} u(Y)ds_Y + \frac{1}{2\pi\rho}\int_{\sigma_2} u(Y)ds_Y < \\ &< \frac{1}{2\pi\rho}\cdot\frac{1}{2}\left[u(X^0) + u(X^1)\right]\cdot\int_{\sigma_1} ds_Y + \frac{1}{2\pi\rho}\cdot u(X^0)\cdot\int_{\sigma_2} ds_Y < \\ &< \frac{1}{2\pi\rho}\cdot u(X^0)\cdot 2\pi\rho = u(X^0) \text{ absurd.} \end{aligned}$$

Rezultă în acest fel că funcţia u este constant egală cu $u(X^0)$ pe $B(X^0, r)$. Pentru a arăta în continuare că pentru orice $X \in \Omega$ avem $u(X) = u(X^0)$ fie

$X^* \in \Omega$ oarecare, X^* fixat şi P o linie poligonală conţinută în Ω care leagă punctele X^0 şi X^*. Fie de asemenea un sens de parcurs pe linia poligonală P de la X^0 la X^*. Mulţimile P şi $\partial\Omega$ sunt compacte şi nu au nici un punct comun. Prin urmare există $r > 0$ astfel încât pentru orice $X \in P$ discul închis: $\overline{B}(X, r) = \{Y : \|Y - X\| \leq r_0\}$ este inclus în Ω; $\overline{B}(X, r) \subset \Omega$. Fie X^2 punctul de intersecţie dintre linia poligonală P şi frontiera bilei $\overline{B}(X^0, r_0)$ primul întâlnit pe direcţia de parcurs de la X^0 la X^*. În X^2 avem
$u(X^2) = u(X^0)$ şi rezultă de aici că pentru orice $X \in \overline{B}(X^2, r)$ avem $u(X) = u(X^0)$. Astfel se obţine egalitatea $u(X) = u(X^0)$ pentru orice $X \in \overline{B}(X^0, r_0) \cup \overline{B}(X^2, r)$.

În continuare se consideră punctul de intersecţie X^3 dintre P şi $\partial\overline{B}(X^2, r)$ primul întâlnit pe direcţia de parcurs X^2, X^*. În X^3 avem $u(X^3) = u(X^0)$ şi rezultă $u(X) = u(X^0)$ pentru orice $X \in \overline{B}(X^3, r)$. În acest fel, după un număr finit de paşi se ajunge la punctul X^* capătul liniei poligonale P şi la egalitatea $u(X^*) = u(X^0)$. Dar aceasta înseamnă că funcţia u este constantă pe Ω ceea ce este absurd.
S-a demonstrat în acest fel că dacă funcţia armonică u pe Ω îşi atinge maximul într-un punct $X^0 \in \Omega$, atunci u este constantă pe Ω.
Prin urmare: dacă o funcţie armonică nu este constantă pe Ω, atunci îşi atinge extremele pe $\partial\Omega$.

Consecinţa 6.2.2 *Dacă funcţia u este armonică pe Ω şi $u/_{\partial\Omega} = 0$ atunci $u \equiv 0$.*

Consecinţa 6.2.3 *Există cel mult o funcţie u de clasă C^2 în Ω şi de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$ care verifică:*

$$\begin{cases} \Delta u = F \\ u/_{\partial\Omega} = f. \end{cases}$$

unde F şi f sunt funcţii date: $F : \overline{\Omega} \to I\!R^1$ continuă pe $\overline{\Omega}$, iar $f : \partial\Omega \to I\!R^1$ continuă pe $\partial\Omega$.

Demonstraţie: Se raţionează prin reducere la absurd.

6.3 Formulele lui Green şi formule de reprezentare în dimensiunea $n \geq 3$

În acest paragraf prezentăm câteva rezultate de calcul diferenţial şi de calcul integral pentru funcţii de n variabile ($n \geq 3$), care intervin în rezolvarea ecuaţiilor cu derivate parţiale în dimensiunea n.

Teorema 6.3.1 *(de legătură între integrala pe un domeniu mărginit şi integrala pe frontiera acestuia)*
Dacă $\Omega \subset I\!R^n$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ netedă (parţial netedă) şi $f_1, f_2, ..., f_n$ sunt n funcţii $f_1, f_2, ..., f_n : \bar{\Omega} \to I\!R^1$ continue pe $\bar{\Omega}$ şi de clasă C^1 pe Ω, atunci are loc egalitatea:

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n f_i \cdot \cos(\bar{n}, \bar{e}_i) dS. \tag{6.14}$$

Demonstraţie: Semnificaţia simbolurilor din formula (6.14) este aceeaşi ca şi în cazul $n = 2$, iar demonstraţia teoremei se face în mod analog.

Teorema 6.3.2 *(de integrare prin părţi)*
Dacă $\Omega \subset I\!R^n$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ netedă (parţial netedă) şi f, g sunt două funcţii $f, g : \bar{\Omega} \to I\!R^1$, continue pe $\bar{\Omega}$ şi de clasă C^1 pe Ω, atunci are loc egalitatea:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g \, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\partial\Omega} f \cdot g \cdot \cos(\bar{n}, \bar{e}_i) dS - \int_\Omega f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx_1 \cdots dx_n \tag{6.15}$$

Demonstraţie: Analoagă cu cea din cazul $n = 2$.

Teorema 6.3.3 *(prima formulă a lui Green)*
Dacă $\Omega \subset I\!R^n$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ netedă (parţial netedă) şi f, g sunt două funcţii $f, g : \bar{\Omega} \to I\!R^1$, de clasă C^1 pe $\bar{\Omega}$ şi de clasă C^2 în Ω, atunci are loc egalitatea:

$$\int_\Omega f \cdot \Delta g \, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\partial\Omega} f \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{n}} \, dS - \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, dx_1 \cdots dx_n \tag{6.16}$$

Demonstraţie: Simbolurile din formula (6.16) au următoarele semnificaţii:

$$\Delta g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial \bar{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \cos(\bar{n}, \bar{e}_i), \qquad \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \bar{e}_i$$

Teorema se demonstrează ca şi în cazul $n = 2$.

Teorema 6.3.4 *(a doua formulă a lui Green)*
Dacă $\Omega \subset I\!R^n$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ netedă (parţial netedă) şi f, g sunt două funcţii $f, g : \bar{\Omega} \to I\!R^1$, de clasă C^1 pe $\bar{\Omega}$ şi de clasă C^2 în Ω, atunci are loc egalitatea:

$$\int_{\Omega} (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\partial\Omega} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{n}} - g \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{n}} \right) dS \tag{6.17}$$

Demonstraţie: Teorema se demonstrează ca şi în cazul $n = 2$.

Teorema 6.3.5 *(de reprezentare a unei funcţii de n variabile)*
Dacă $\Omega \subset I\!R^n$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ netedă (parţial netedă) şi $u : \bar{\Omega} \to I\!R^1$ este o funcţie de clasă C^1 pe $\bar{\Omega}$ şi de clasă C^2 în Ω, atunci are loc următoarea formulă de reprezentare:

$$\begin{aligned} u(X) &= -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{\Omega} \frac{1}{\|X - Y\|^{n-2}}\, \Delta u(Y)\, dy_1 \cdots dy_n + \\ &+ \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\|X - Y\|^{n-2}}\, \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_Y}(Y)\, dS_Y - \\ &- \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{\partial\Omega} u(Y)\, \frac{\partial}{\partial \bar{n}_Y} \left(\frac{1}{\|X - Y\|^{n-2}} \right) dS_Y \end{aligned} \tag{6.18}$$

unde σ_n reprezintă aria suprafeţei bilei

$$\bar{B}(0,1) = \{Y = (y_1, \ldots, y_n) \in I\!R^n |\, \|Y\| \leq 1\}$$

iar indicele Y la $\dfrac{\partial}{\partial \bar{n}_Y}$ arată că se calculează derivata normală a funcţiei $Y \mapsto \dfrac{1}{\|X - Y\|^{n-2}}$; analog dS_Y.

Demonstraţie: Se face analog cu cazul $n = 2$.

Comentariu Formula (6.18) permite construcţia funcţiei u din valorile Laplacianului Δu al funcţiei în Ω, valorile derivatei normale $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{n}}$ a lui u pe $\partial\Omega$ şi valorile lui u pe $\partial\Omega$.

Vom arăta ce devine această formulă de reprezentare în cazul funcţiilor armonice.

Definiţia 6.3.1 *Zicem că funcţia $u : \Omega \subset I\!R^n \to I\!R^1$ este armonică în Ω dacă funcţia este de clasă C^2 în Ω şi dacă*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad (\forall)(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega.$$

Observaţia 6.3.1 În condiţiile din Teorema 6.3.5 (de reprezentare), dacă funcţia u este armonică în Ω, atunci avem:

$$\begin{aligned} u(X) &= \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \left[\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\|X-Y\|^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_Y}(Y)\, dS_Y - \right. \\ &- \left. \int_{\partial\Omega} u(Y) \frac{\partial}{\partial \bar{n}_Y} \left(\frac{1}{\|X-Y\|^{n-2}} \right) dS_Y \right]. \end{aligned}$$

Teorema 6.3.6 *(de reprezentare a funcţiilor armonice)*
Dacă $\Omega \subset I\!R^n$ este un domeniu şi $u : \bar{\Omega} \to I\!R^1$ este o funcţie armonică în Ω ($\Delta u = 0$), atunci pentru orice $x \in \Omega$ şi orice $r > 0$ astfel încât bila închisă $\bar{B}(0, r) = \{Y \in I\!R^n \mid \|Y\| \leq r\}$ este inclusă în Ω are loc egalitatea:

$$u(X) = \frac{1}{\sigma_n\, r^{n-2}} \int_{\partial \bar{B}(X,r)} u(Y)\, dS_Y \tag{6.19}$$

Demonstraţie: Demonstraţia este analoagă cu cea din cazul $n = 2$.

Observaţia 6.3.2 Dacă $\Omega \subset I\!R^n$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ netedă (parţial netedă) şi $u : \bar{\Omega} \to I\!R^1$ este o funcţie de clasă C^1 pe $\bar{\Omega}$ şi este armonică în Ω ($\Delta u = 0$ în Ω), atunci:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\, dS = 0.$$

Teorema 6.3.7 *(de extrem a funcţiilor armonice)*
Dacă $\Omega \subset I\!R^n$ *este un domeniu mărginit cu frontiera* $\partial\Omega$ *netedă (parţial netedă) şi* $u : \bar{\Omega} \to I\!R^1$ *este o funcţie continuă pe* $\bar{\Omega}$ *şi armonică în* Ω *(*$\Delta u = 0$ *în* Ω*), atunci funcţia* u *este constantă sau îşi atinge extremele pe frontiera* $\partial\Omega$.

Demonstraţie: Demonstraţia este analoagă cu cea din cazul $n = 2$.

Consecinţa 6.3.1 *Dacă* $\Delta u = 0$ *şi* $u|_{\partial\Omega} = 0$ *atunci* $u = 0$.

Consecinţa 6.3.2 *Există cel mult o funcţie* u *de clasă* C^2 *în* Ω *şi de clasă* C^1 *pe* $\bar{\Omega}$ *care verifică*

$$\begin{cases} \Delta u = F \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

unde F *şi* f *sunt două funcţii date,* $F : \bar{\Omega} \to I\!R^1$ *este continuă pe* $\bar{\Omega}$ *şi* $f : \partial\Omega \to I\!R^1$ *este continuă pe* $\partial\Omega$.

6.4 Probleme la limită pentru ecuaţia lui Poisson

Fie $\Omega \subset I\!R^n$ un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ netedă (parţial netedă) şi f o funcţie $f : \bar{\Omega} \to I\!R^1$ de clasă C^1 pe Ω.

Definiţia 6.4.1 *Ecuaţia lui Poisson este o relaţie de dependenţă funcţională de forma*

$$-\Delta u = f(X), \quad (\forall) X = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \tag{6.20}$$

dintre o funcţie necunoscută $u : \Omega \to I\!R^1$ şi funcţia dată f de clasă C^1 pe $\bar{\Omega}$.

În ecuaţia (6.20) Δu înseamnă $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ (adică Laplacianul funcţiei u) iar funcţia $u : \bar{\Omega} \to I\!R^1$ este soluţie clasică dacă este continuă pe $\bar{\Omega}$, de clasă C^2 în Ω şi satisface egalitatea:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n), \quad (\forall)(x_1, ..., x_n) \in \Omega.$$

Definiţia 6.4.2 *Problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Poisson este problema determinării acelor soluţii ale ecuaţiei (6.20) care verifică condiţia la frontieră*

$$u|_{\partial\Omega} = h \tag{6.21}$$

unde h este o funcţie $h : \partial\Omega \to I\!R^1$ continuă pe $\partial\Omega$ considerată cunoscută.

Problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Poisson se notează tradiţional:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (\forall)(x_1, ..., x_n) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = h \end{cases} . \tag{6.22}$$

Definiţia 6.4.3 *Problema Neumann pentru ecuaţia lui Poisson este problema determinării acelor soluţii ale ecuaţiei (6.20) care verifică condiţia la frontieră*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right|_{\partial\Omega} = g \tag{6.23}$$

unde g este o funcţie $g : \partial\Omega \to I\!R^1$ continuă pe $\partial\Omega$ considerată cunoscută şi $\bar{n}$ este versorul normalei exterioare.

Problema Neumann pentru ecuaţia lui Poisson se notează tradiţional:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, \quad (\forall)(x_1, ..., x_n) \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right|_{\partial\Omega} = g \end{cases} . \tag{6.24}$$

Teorema 6.4.1 *(de unicitate a soluţiei Problemei Dirichlet)*
Dacă Problema Dirichlet (6.22) are soluţie, această soluţie este unică.

Demonstraţie: Fie u_1 şi u_2 două soluţii ale Problemei Dirichlet (6.22). Considerăm funcţia $u = u_1 - u_2$ pentru care avem:

$$\Delta u = 0 \quad \text{şi} \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Rezultă de aici, pe baza principiului de maxim a funcţiilor armonice, că $u \equiv 0$. Prin urmare $u_1 = u_2$.

Teorema 6.4.2 *(de neunicitate a soluţiei Problemei Neumann)*
Dacă u este o soluţie a Problemei Neumann (6.24), atunci şi $u + C$ este o soluţie a Problemei Neumann, unde C este o constantă. Dacă u, v sunt soluţii ale Problemei Neumann (6.24), atunci $u - v = const$.

Demonstraţie: Fie u o soluţie a problemei (6.24) şi $v = u + C$. Întrucât $\Delta v = \Delta u$ şi $\left.\dfrac{\partial v}{\partial \bar{n}}\right|_{\partial\Omega} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right|_{\partial\Omega} = g$, rezultă că v este soluţie a problemei (6.24).

Dacă u, v sunt soluţii ale problemei (6.24) atunci $w = u - v$ verifică:

$$\Delta w = 0 \quad \text{şi} \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \bar{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

În baza formulelor de reprezentare rezultă $w = const$.

Teorema 6.4.3 *Condiţia necesară pentru ca Problema Neumann (6.24) să aibă soluţie este ca funcţiile f şi g să verifice egalitatea:*

$$\int_{\partial\Omega} g(Y)\, dS_Y + \int_{\Omega} f(Y)\, dY = 0. \tag{6.25}$$

Demonstraţie: Să presupunem că Problema Neumann (6.24) are o soluţie u. Considerând funcţiile u şi 1, aplicăm cea de-a doua formulă a lui Green acestor funcţii:

$$\int_{\Omega}(\Delta u \cdot 1 - u\,\Delta 1)\,dY = \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{n}_Y} - u\,\frac{\partial 1}{\partial \bar{n}_Y}\right)\,dS_Y.$$

Ţinând seama de egalităţile $-\Delta u = f$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \bar{n}_Y}\right|_{\partial\Omega} = g$, $\Delta 1 = 0$ şi $\dfrac{\partial 1}{\partial \bar{n}_Y} = 0$ obţinem relaţia (6.25).

Din cele prezentate până acum nu rezultă că Problema Dirichlet (6.22) sau Problema Neumann (6.24) are soluţie. În paragrafele următoare vom prezenta metoda funcţiilor Green pentru a arăta că în anumite condiţii aceste probleme au soluţie şi apoi vom reprezenta aceste soluţii.

6.5 Funcţia Green pentru Problema Dirichlet

Considerăm un domeniu $\Omega \subset I\!R^n$ mărginit, cu frontiera netedă (parţial netedă), funcţia $f : \bar{\Omega} \to I\!R^1$ de clasă C^1 pe $\bar{\Omega}$ şi funcţia $h : \partial\Omega \to I\!R^1$ continuă pe $\partial\Omega$. Aceste elemente definesc Problema Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (\forall)(x_1, ..., x_n) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = h \end{cases} . \tag{6.26}$$

Definiţia 6.5.1 *Numim funcţie Green pentru o Problemă Dirichlet o funcţie G de forma:*

$$G(X,Y) = E(X,Y) - v(X,Y) \tag{6.27}$$

în care

$$E(X,Y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{\|X-Y\|}, & (\forall)X,Y \in \Omega, X \neq Y, n=2 \\ \dfrac{1}{(n-2)\sigma_n} \cdot \dfrac{1}{\|X-Y\|^{n-2}}, & (\forall)X,Y \in \Omega, X \neq Y, n>2 \end{cases} \tag{6.28}$$

iar funcţia $v(X,Y)$ are următoarele proprietăţi:

a) $Y \mapsto v(X,Y)$ este funcţie armonică în Ω şi continuă pe $\bar{\Omega}$ pentru orice $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, X fixat.

b) pentru $X \in \Omega$, X fixat, $G(X,Y) = 0$, $(\forall)Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \partial\Omega$.

Propoziţia 6.5.1 *Dacă există funcţia Green $G(X,Y)$ pentru Problema Dirichlet, atunci ea este unică.*

Demonstraţie: Dacă G_1, G_2 sunt două funcţii Green pentru Problema Dirichlet, atunci pentru orice $X \in \Omega$ fixat,

$$v(X,Y) = v_1(X,Y) - v_2(X,Y)$$

este funcţie armonică în Ω şi identic nulă pe $\partial\Omega$. Rezultă $v(X,Y) = 0$, $(\forall)Y \in \Omega$, şi $(\forall)X \in \Omega$, fixat. Aceasta arată că $v(X,Y) \equiv 0$, adică $v_1(X,Y) = v_2(X,Y)$.

Propoziţia 6.5.2 *Dacă pentru orice $X \in \bar{\Omega}$ funcţia $Y \mapsto v(X,Y)$ este de clasă C^1 pe $\bar{\Omega}$, atunci funcţia Green este simetrică, adică:*

$$G(X_1, X_2) = G(X_2, X_1),\ (\forall)X_1, X_2 \in \Omega \ \ \text{şi} \ \ X_1 \neq X_2. \tag{6.29}$$

Demonstraţie: Se consideră funcţiile $P(Y){=}G(X_1,Y)$ şi $Q(Y){=}G(X_2,Y)$ şi se aplică cea de-a doua formulă a lui Green pentru aceste funcţii pe domeniul $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (B(X_1,\varepsilon) \cup B(X_2,\varepsilon))$, unde $B(X_i,\varepsilon) = \{X : \|X - X_i\| < \varepsilon\}$, $i = 1, 2$. Se obţine egalitatea:

$$\int_{\partial B(X_1,\varepsilon)} \left(P\,\frac{\partial Q}{\partial \bar{n}_Y} - Q\,\frac{\partial P}{\partial \bar{n}_Y} \right) dS_Y + \int_{\partial B(X_2,\varepsilon)} \left(P\,\frac{\partial Q}{\partial \bar{n}_Y} - Q\,\frac{\partial P}{\partial \bar{n}_Y} \right) dS_Y = 0.$$

Trecând la limită pentru $\varepsilon \to 0$ în această egalitate, se obţine simetria.

Teorema 6.5.1 *Dacă G este funcţia Green pentru Problema Dirichlet (6.26) şi u este soluţia acestei probleme, atunci are loc egalitatea:*

$$u(X) = -\int_\Omega G(X,Y) \cdot f(Y)\, dY - \int_{\partial\Omega} h(Y) \cdot \frac{\partial G(X,Y)}{\partial \bar{n}_Y} dS_Y. \tag{6.30}$$

Demonstraţie: Scriem cea de-a doua formulă a lui Green pentru funcţiile $u(Y)$ şi $Y \mapsto v(X,Y)$, precum şi formula generală de reprezentare a funcţiei $u(X)$ (formula (6.18)). Prin adunarea acestora rezultă (6.30).

Observaţia 6.5.1 Această teoremă arată că dacă există o funcţie Green G pentru Problema Dirichlet (6.26) care are soluţia u, atunci u se reprezintă sub forma (6.30) cu ajutorul lui G. Este adevărată şi afirmaţia reciprocă: dacă G este funcţia Green pentru Problema Dirichlet, atunci funcţia u definită cu (6.30) este soluţia problemei Dirichlet (6.26). Metoda de determinare a soluţiei Problemei Dirichlet pe această cale se numeşte metoda funcţiei Green.

Exemplul 6.5.1
Fie $\Omega = \{X \in I\!R^3 \,|\, \|X\| < r\}$ şi $\partial\Omega = \{X \in I\!R^3 \,|\, \|X\| = r\}$. Soluţia Problemei Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & (\forall)X \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = h \end{cases}$$

unde h este o funcţie continuă pe $\partial\Omega$, este dată de formula lui Poisson:

$$u(X) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial\Omega} \frac{r^2 - \|X\|^2}{\|X - Y\|^3} h(Y)\, dS_Y \tag{6.31}$$

întrucât funcţia $G(X, Y)$ definită prin

$$G(X, Y) = \frac{1}{4\pi\|X - Y\|} - \frac{r}{4\pi\|X^* - Y\|} \tag{6.32}$$

unde X^* este conjugatul lui X faţă de sfera $\partial\Omega$ (adică X, X^* sunt coliniare şi $\|X\| \cdot \|X^*\| = r$) este funcţia Green pentru această Problemă Dirichlet.

Observaţia 6.5.2 Determinarea funcţiei Green pentru Problema Dirichlet revine la determinarea funcţiei $v = v(X, Y)$ ceea ce revine, conform definiţiei funcţiei Green, la rezolvarea Problemei Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta_Y v(X, Y) = 0 \\ v(X, Y)|_{Y \in \partial\Omega} = E(X, Y)|_{Y \in \partial\Omega} \end{cases} \tag{6.33}$$

Această problemă este aparent mai simplă decât Problema Dirichlet (6.26) dar în realitate ea este rezolvată pentru domenii Ω particulare, prin metode geometrice. Din acest motiv demonstraţia existenţei soluţiei Problemei Dirichlet (6.26) prin folosirea funcţiei Green se poate face doar pentru domenii Ω particulare pentru care se ştie că există funcţia Green.

Exerciţii

1. Determinaţi soluţia Problemei Dirichlet:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \quad \text{în } \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < r^2\} \\ \\ u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2, \quad \text{pentru } (x_1, x_2, x_3) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

2. Determinaţi funcţia Green a Problemei Dirichlet pentru cerc şi rezolvaţi o Problemă Dirichlet pentru cerc.

6.6 Funcţia Green pentru Problema Neumann

Considerăm Problema Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f,\ (\forall)(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \tag{6.34}$$

în care $f:\Omega\to I\!R^1$ este funcţie de clasă C^1 pe $\bar{\Omega}$ şi $g:\partial\Omega\to I\!R^1$ este funcţie continuă.

Presupunem că funcţiile f şi g verifică:

$$\int_\Omega f(Y)\,dY + \int_{\partial\Omega} g(Y)\,dS_Y = 0. \tag{6.35}$$

Definiţia 6.6.1 *Numim funcţia Green pentru Problema Neumann (6.34) orice funcţie G de forma*

$$G(X,Y) = E(X,Y) - v(X,Y) \tag{6.36}$$

care verifică

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{n}_Y}(X,Y) = 0,\ (\forall)Y=(y_1,\ldots,y_n)\in\partial\Omega \tag{6.37}$$

unde $v:\Omega\times\Omega\to I\!R^1$ şi pentru orice $Y\in\Omega$ fixat funcţia $Y\mapsto v(X,Y)$ este armonică pe Ω, iar $E(X,Y)$ este definită pentru orice $X,Y\in\Omega$, $X\neq Y$ şi este dată de:

$$E(X,Y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{\|X-Y\|}, & (\forall)X,Y\in\Omega, X\neq Y, n=2 \\ \dfrac{1}{(n-2)\sigma_n}\cdot\dfrac{1}{\|X-Y\|^{n-2}}, & (\forall)X,Y\in\Omega, X\neq Y, n>2 \end{cases} \tag{6.38}$$

Observaţia 6.6.1 Dacă G_1 şi G_2 sunt funcţii Green pentru Problema Neumann, atunci $G_1 - G_2 = const$.

Propoziţia 6.6.1 *Dacă pentru orice $X\in\bar{\Omega}$ funcţia $Y\mapsto v(X,Y)$ este de clasă C^1 pe $\bar{\Omega}$, atunci funcţia Green pentru Problema Neumann este simetrică:*

$$G(X_1,X_2) = G(X_2,X_1),\ (\forall)X_1,X_2\in\Omega \ \text{ şi } \ X_1\neq X_2. \tag{6.39}$$

Demonstraţie: Analoagă cu cea din cazul funcţiei Green pentru Problema Dirichlet.

Teorema 6.6.1 *Dacă G este o funcţie Green pentru Problema Neumann (6.34) şi u este o soluţie a acestei probleme, atunci există o constantă C astfel ca să aibe loc egalitatea:*

$$u(X) = -\int_{\Omega} G(X,Y) \cdot f(Y)\, dY + \int_{\partial\Omega} E(X,Y) \cdot g(Y)\, dS_Y + C. \qquad (6.40)$$

Demostraţie: Analoagă cu cea de la cazul soluţiei Problemei Dirichlet.

Observaţia 6.6.2 Determinarea funcţiei Green pentru Problema Neumann revine la determinarea funcţiei $v(X,Y)$ ceea ce înseamnă, conform definiţiei funcţiei Green pentru Problema Neumann, rezolvarea Problemei Neumann

$$\begin{cases} -\Delta_Y v(X,Y) = f,\ (\forall)(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial \bar{n}_Y}\right|_{\partial\Omega} = \left.\dfrac{\partial E}{\partial \bar{n}_Y}\right|_{\partial\Omega} \end{cases} \qquad (6.41)$$

Această problemă este aparent mai simplă decât Problema Neumann (6.34), dar în realitate este complexă. De aceea demonstraţia existenţei soluţiei Problemei Neumann (6.34) prin folosirea funcţiei Green se poate face doar pentru cazuri pentru care se ştie că există funcţia Green.

6.7 Problemele Dirichlet şi Neumann pentru ecuaţia lui Laplace pe disc. Separarea variabilelor.

Considerăm mulţimea $\Omega = \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 |\ x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ care va fi numită disc centrat în origine şi de rază R.

Ecuaţia lui Poisson pe Ω este ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2) \tag{6.42}$$

unde f este o funcţie de clasă C^1 pe $\bar{\Omega}$.

Dacă funcţia f este identic nulă, atunci ecuaţia lui Poisson devine:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \tag{6.43}$$

şi se numeşte ecuaţia lui Laplace pe discul Ω de rază R.

Problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace pe discul de rază R înseamnă determinarea acelor soluţii ale ecuaţiei (6.43) care pe frontiera discului $\partial\Omega$ coincid cu o funcţie continuă h dinainte dată, adică

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,\ (\forall)(x_1, x_2) \in \Omega \\ u\ |_{\partial\Omega} = h \end{cases} \tag{6.44}$$

Soluţia acestei Probleme Dirichlet se poate determina folosind funcţia Green pentru Problema Dirichlet.

Problema Neumann pentru ecuaţia lui Laplace pe discul de rază R înseamnă determinarea acelor soluţii ale ecuaţiei (6.43) ale căror derivată după direcţia versorului normalei exterioare la $\partial\Omega$ coincide cu o funcţie continuă g dinainte dată pe $\partial\Omega$, adică:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,\ \forall(x_1, x_2) \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \tag{6.45}$$

Pentru ca problema (6.45) să aibe soluţie este necesar ca

$$\int_{\partial\Omega} g(Y)ds_Y = 0 \tag{6.46}$$

şi dacă această condiţie este îndeplinită, atunci, folosind funcţia Green pentru Problema Neumann, se pot determina soluţiile prolemei (6.45), (care diferă printr-o constantă aditivă).

Scopul nostru în acest paragraf este să prezentăm o altă metodă, numită "separarea variabilelor", cu care se pot determina soluţiile problemelor (6.44) şi (6.45). Deoarece s-a considerat Ω ca fiind un domeniu circular vom face mai întâi o schimbare de coordonate, mai exact vom scrie problemele (6.44) şi (6.45) în coordonate polare:

$$\begin{cases} x_1 = r\ \cos\varphi \\ x_2 = r\ \sin\varphi \end{cases},\ r > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi). \tag{6.47}$$

Notăm cu T transformarea $(r, \varphi) \to (x_1, x_2)$ definită de (6.47). Dacă u este o funcţie care satisface ecuaţia (6.43) atunci notăm cu $\widetilde{u}$ funcţia $\widetilde{u} = u \circ T$.

Folosind regulile de derivare ale funcţiilor compuse deducem că $\widetilde{u}$ verifică ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} = 0 \tag{6.48}$$

care se numeşte ecuaţia lui Laplace în coordonate polare.

Metoda separării variabilelor constă în căutarea unor soluţii $\widetilde{u}(r, \varphi)$ de forma:

$$\widetilde{u}(r, \varphi) = P(r) \cdot Q(\varphi) \tag{6.49}$$

adică soluţii care sunt produse de funcţii ce depind fiecare de câte o variabilă r, respectiv φ. Impunând la (6.49) să verifice (6.48) rezultă:

$$r^2 \frac{P''}{P} + r\frac{P'}{P} = -\frac{Q''}{Q}. \tag{6.50}$$

Membrul stâng în această egalitate depinde doar de r iar membrul drept de φ. Cum r şi φ sunt variabile independente rezultă că fiecare membru este constant. Dacă notăm cu λ această constantă atunci deducem din (6.50) egalităţile:

$$r^2 P'' + rP' - \lambda P = 0 \tag{6.51}$$

$$Q'' + \lambda Q = 0 \tag{6.52}$$

Deoarece funcţia $\widetilde{u}$ este de clasă C^2 soluţia ecuaţiei (6.52) trebuie să verifice $Q(0) = Q(2\pi)$. De aici rezultă că $\lambda_n = n^2$, $n \in I\!N$.
Pentru $\lambda_n = n^2$ avem:

$$Q_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \tag{6.53}$$

în care A_n şi B_n sunt constante arbitrare.
Ecuaţia (6.51) este liniară de tip Euler şi se rezolvă făcându-se schimbarea de variabilă $r = e^t$. Pentru $\lambda = n^2$ soluţia generală este:

$$P_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \text{ dacă } n = 1, 2, ... \tag{6.54}$$
$$P_0(r) = A_0 + B_0 \ln r, \quad \text{dacă } n = 0. \tag{6.55}$$

Rezultă în acest fel că (6.48) admite următoarea familie de soluţii:

$$\widetilde{u}_n(r, \varphi) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r, & n = 0 \\ r^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), & n = 1, 2, ... \\ r^{-n}(A_{-n} \cos n\varphi + B_{-n} \sin n\varphi), & n = 1, 2, ... \end{cases} \tag{6.56}$$

în care $A_0, B_0, A_n, B_n, A_{-n}, B_{-n}$ sunt constante oarecare.

Observaţia 6.7.1 Orice sumă finită de soluţii de forma (6.48) este soluţie pentru ecuaţia (6.48).

Definiţia 6.7.1 *O soluţie formală a ecuaţiei lui Laplace în coordonate polare este o "funcţie" $\widetilde{u}(r, \varphi)$ de forma:*

$$\widetilde{u}(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + A_{-n} r^{-n}) \cos n\varphi + (B_n r^n + B_{-n} r^{-n}) \sin n\varphi] \tag{6.57}$$

Denumirea de soluţie formală provine de la faptul că nu avem informaţii relative la convergenţa seriei (6.57). Ceea ce este clar este că, termenii seriei (6.57) sunt soluţii şi că, dacă seria are doar un număr finit de termeni diferiţi de zero, atunci suma este o funcţie care este soluţie a ecuaţiei lui Laplace.

Pentru determinarea soluţiei Problemei Dirichlet (6.44), mai întâi sriem problema în coordonate polare:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} = 0, \;\; r < R, \varphi \in [0, 2\pi) \\ \widetilde{u}(r,\varphi) = u(r, \varphi + 2\pi) \\ \lim\limits_{r \to 0} \mid \widetilde{u}(r,\varphi) \mid < +\infty \\ \widetilde{u}(R,\varphi) = \widetilde{h}(\varphi) \end{cases} \tag{6.58}$$

unde $\widetilde{h}(\varphi) = h(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$.
Considerăm dezvoltarea funcţiei $\widetilde{h}$ în serie Fourier în $L^2[0, 2\pi)$

$$\widetilde{h}(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \tag{6.59}$$

şi impunem soluţiei formale $\widetilde{u}(r,\varphi)$ dată de (6.57) să verifice condiţiile (6.58). Deducem:

$$A_0 = a_0, A_n = \frac{a_n}{R^n} \;\text{ şi }\; B_n = \frac{b_n}{R^n}$$

care înlocuite, conduc la soluţia formală:

$$\widetilde{u}(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \tag{6.60}$$

Pentru a demonstra că această soluţie formală este soluţia problemei vom presupune că funcţia $\widetilde{h}$ este de clasă C^2 şi $\widetilde{h}(0) = \widetilde{h}(2\pi)$. În aceste condiţii pentru coeficienţii Fourier a_n, b_n ai funcţiei $\widetilde{h}$ putem scrie:

$$a_n = -\frac{1}{n}{b_n}' = -\frac{1}{n^2}{a_n}'' \;\text{ şi }\; b_n = \frac{1}{n}{a_n}' = -\frac{1}{n^2}{b_n}''. \tag{6.61}$$

unde a'_n, b'_n şi a''_n, b''_n sunt coeficienţii Fourier ai funcţiei $\widetilde{h}'$, respectiv $\widetilde{h}''$.

Din apartenenţa $\widetilde{h}'' \in L^2[0, 2\pi)$ avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|{a_n}''|^2 + |{b_n}''|^2) < +\infty$ de unde rezultă că există $M > 0$ astfel încât să avem $|{a_n}''| \leq M$ şi $|{b_n}''| \leq M$ pentru

orice $n \in I\!N$. De aici şi din (6.61) se obţine inegalitatea:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq 2M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$$

Cu criteriul lui Weierstrass rezultă de aici că seria (6.60) este absolut şi uniform convergentă pe $[0, R] \times [0, 2\pi]$, deci funcţia $\widetilde{u}(r, \varphi)$ definită de (6.60) este corect definită şi este continuă pe $[0, R] \times [0, 2\pi]$.

Derivabilitatea $\widetilde{u}(r, \varphi)$ rezultă din derivabilitatea termenilor seriei (6.60) şi din faptul că seriile obţinute prin derivare termen cu termen sunt absolut şi uniform convergente fiind majorate de serii de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \left(\frac{r}{R}\right)^n [|\, a_n \,| + |\, b_n \,|],\ p = 1, 2, ...$$

Calculând suma seriei obţinem formula:

$$\widetilde{u}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{h}(\theta)\frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + R^2}d\theta \qquad (6.62)$$

numită formula lui Poisson.

Pentru determinarea soluţiei Problemei Neumann se procedează asemănător.

Exerciţii

1.Găsiţi soluţia Problemei Dirichlet:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, & x_1^2 + x_2^2 < R^2 \\ u(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2, & x_1^2 + x_2^2 = R^2 \end{cases}$$

R: $u(x_1, x_2) = R^2 + 2x_1x_2$

2.Găsiţi soluţia Problemei Dirichlet:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, & x_1^2 + x_2^2 < 1 \\ u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2, & x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

R: $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$

3.Găsiţi soluţia Problemei Neumann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, & x_1^2 + x_2^2 < R^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \widetilde{n}} = x_1 + x_1^2 - x_2^2, & x_1^2 + x_2^2 = R^2 \end{cases}$$

R: $u(x_1, x_2) = A_0 + R x_1 + \dfrac{R}{2}(x_1^2 - x_2^2)$

6.8 Calculul simbolic al soluţiei Problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace pe disc

Cosiderăm Problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace pe discul de rază R:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ (\forall)(x,y) \in \Omega \\ u \mid_{\partial\Omega} = h \end{cases} \tag{6.63}$$

Funcţia *pdsolve* nu poate găsi direct, prin calcul simbolic soluţia corespunzătoare unei astfel de probleme. Astfel, pe baza noţiunilor teoretice prezentate în paragraful precedent (formula pentru soluţia formală), vom prezenta un program in *Maple* care să afişeze expresia analitică a soluţiei Problemei Dirichlet (6.63).
Scriind problema în coordonate polare:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} = 0, \ \ r < R, \varphi \in [0, 2\pi) \\ \widetilde{u}(r,\varphi) = u(r, \varphi + 2\pi) \\ \lim\limits_{r\to 0} \mid \widetilde{u}(r,\varphi) \mid < +\infty \\ \widetilde{u}(R,\varphi) = \widetilde{h}(\varphi) \end{cases} \tag{6.64}$$

şi dezvoltând funcţia $\widetilde{h}$ în serie Fourier, se obţine soluţia formală:

$$\widetilde{u}(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{R^n}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi). \tag{6.65}$$

în care a_0, a_n, b_n sunt coeficienţii Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{h}(\varphi)d\varphi \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{h}(\varphi)\cdot \cos n\varphi d\varphi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{h}(\varphi)\cdot \sin n\varphi d\varphi$$

Această soluţie formală se obţine în *Maple* cu ajutorul procedurii *DirichletInt*:

```
> restart;
> DirichletInt:=proc(f,R)
  local a0,a,b;
> a0:=(1/(2*Pi))*Int(f,phi=-Pi..Pi);
> a:=n->1/Pi*Int(f*cos(n*phi),phi=-Pi..Pi);
> b:=n->1/Pi*Int(f*sin(n*phi),phi=-Pi..Pi);
> a0+add(r^n/R^n*(a(n)*cos(n*phi)+b(n)*sin(n*phi)),n=1..Order);
> RETURN(map(simplify,value(%)));
> end:
```

Apelarea acestei proceduri se realizează cu instrucţiunea $DirichletInt(f, R)$ în care f este funcţia $\widetilde{h}$ din problema (6.64), după cum se poate observa din următoarele exemple:

Exemplul 1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, & x_1^2 + x_2^2 < R^2 \\ u(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2, & x_1^2 + x_2^2 = R^2 \end{cases}$$

```
> f:=(x1+x2)^2:  R:=R:
> f:=subs(x1=r*cos(phi),x2=r*sin(phi),r=R,f);
```

$$f := (R\cos(\phi) + R\sin(\phi))^2$$

```
> sol1:=DirichletInt(f,R);
```

$$sol1 := R^2 + r^2\sin(2\,\phi)$$

Exemplul 2:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, & x_1^2 + x_2^2 < 1 \\ u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2, & x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

```
> f:=x1*x2:  R:=1:
> f:=subs(x1=r*cos(phi),x2=r*sin(phi),r=R,f);
```

$$f := \cos(\phi)\sin(\phi)$$

```
> sol2:=DirichletInt(f,R);
```

$$sol2 := 1/2\, r^2 \sin(2\,\phi)$$

Exemplul 3:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} = 0, \quad r < 1, \varphi \in [0, 2\pi) \\ \widetilde{u}(r,\varphi) = u(r, \varphi + 2\pi) \\ \lim\limits_{r\to 0} \mid \widetilde{u}(r,\varphi) \mid < +\infty \\ \widetilde{u}(1,\varphi) = \sin^3 \varphi \end{cases}$$

```
> f:=sin(phi)^3:  R:=1:
> sol3:=DirichletInt(f,R);
```

$$sol3 := 3/4\, r \sin(\phi) - 1/4\, r^3 \sin(3\,\phi)$$

Exemplul 4:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} = 0, \quad r < 1, \varphi \in [0, 2\pi) \\ \widetilde{u}(r,\varphi) = u(r, \varphi + 2\pi) \\ \lim\limits_{r\to 0} \mid \widetilde{u}(r,\varphi) \mid < +\infty \\ \widetilde{u}(1,\varphi) = \sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi \end{cases}$$

```
> f:=sin(phi)^6+cos(phi)^6:  R:=1:
> sol4:=DirichletInt(f,R);
```

$$sol4 := 5/8 + 3/8\, r^4 \cos(4\,\phi)$$

Capitolul 7

Soluţii generalizate. Metode variaţionale

În capitolul anterior ne-am ocupat de rezolvarea Problemei Dirichlet şi a Problemei Neumann în cazul ecuaţiei lui Poisson. Particularitatea acestei ecuaţii constă în aceea că ecuaţia eliptică este definită de Laplacianul $\triangle$.

În cele ce urmează vom considera ecuaţii eliptice mai generale, numite ecuaţii eliptice de tip divergenţă pentru care vom formula conceptul de Problemă Dirichlet. Pe lângă conceptul de soluţie clasică introducem şi conceptul de soluţie generalizată şi prezentăm condiţii în care soluţia generalizată există şi este unică.

Deasemenea , în acest capitol introducem Problema Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţii parabolice şi hiperbolice, şi prezentăm condiţii în care soluţia generalizată a acestor probleme există.

7.1 Ecuaţia eliptică de tip divergenţă şi Problema Dirichlet pentru această ecuaţie

Considerăm un domeniu mărginit $\Omega \subset I\!R^n$ cu frontiera $\partial\Omega$ netedă (parţial netedă) şi funcţiile reale a_{ij}, c şi F definite pe $\overline{\Omega}$ $(i, j = \overline{1, n})$ având următoarele proprietăţi:

1) a_{ij} sunt de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\overline{\Omega}$ şi există $\mu_0 > 0$ astfel încât pentru orice $X = (x_1, ..., x_n) \in \overline{\Omega}$ şi orice $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in I\!R^n$ avem

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \xi_i \cdot \xi_j \geq \mu_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \text{ şi } \quad a_{ij}(X) = a_{ji}(X)$$

2) funcţia c este continuă pe $\overline{\Omega}$ şi $c(X) \geq 0, (\forall) X \in \overline{\Omega}$.

3) funcţia F este continuă pe $\overline{\Omega}$.

Definiţia 7.1.1 *Se numeşte ecuaţie cu derivate parţiale eliptică de tip divergenţă o relaţie de dependenţă funcţională de forma*

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(X) \cdot u = F(X), (\forall)\ X \in \Omega \tag{7.1}$$

dintre funcţia necunoscută u şi derivatele sale parţiale de ordinul întâi şi de ordinul al doilea.

În ecuaţia (7.1) funcţiile a_{ij}, c şi F se consideră cunoscute.

Definiţia 7.1.2 *O funcţie reală u de clasă $\mathcal{C}^2$ pe Ω care verifică*

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}(X) \right) + c(X) \cdot u(X) = F(X),\ (\forall)\ X \in \Omega$$

se numeşte soluţie clasică a ecuaţiei (7.1).

Definiţia 7.1.3 *Problema determinării acelor soluţii u ale ecuaţiei (7.1) care sunt continue pe $\overline{\Omega}$ şi verifică condiţia la frontieră*

$$u|_{\partial\Omega} = h \tag{7.2}$$

se numeste Problemă Dirichlet pentru ecuaţia (7.1).

În egalitatea (7.2), h este o funcţie reală continuă pe $\partial\Omega$, considerată cunoscută.

Problema Dirichlet pentru ecuaţia cu derivate parţiale eliptică de tip divergenţă se notează cu

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(X)\cdot u = F(X), (\forall)\ X \in \Omega \\ \\ u|_{\partial\Omega} = h. \end{cases} \tag{7.3}$$

Observaţia 7.1.1 Dacă există o funcţie $H : \Omega' \supset \overline{\Omega} \to I\!R'$ de clasă $\mathcal{C}^2$ astfel încât $H|_{\partial\Omega} = h$ atunci u este soluţie a Problemei Dirichlet (7.3) dacă şi numai dacă funcţia $v = u - H$ este soluţia Problemei Dirichlet:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + c(X)\cdot v = G(X), (\forall)\ X \in \Omega \\ \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{7.4}$$

unde $G(X) = F(X) - c(X)\cdot H(X) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X)\cdot\frac{\partial H}{\partial x_j}\right).$

Astfel, printr-o schimbare de funcţie Problema Dirichlet cu condiţii pe frontieră neomogene se reduce la o Problemă Dirichlet cu condiţii pe frontieră omogene.
Datorită acestui fapt, în cele ce urmează vom considera Probleme Dirichlet în care funcţia h dată pe frontieră este identic nulă.

Observaţia 7.1.2 Dacă se consideră spaţiul vectorial al funcţiilor reale u continue pe $\overline{\Omega}$ de clasă $\mathcal{C}^2$ în Ω şi nule pe frontieră :

$$D = \{u \mid u : \overline{\Omega} \to I\!R^1,\ u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega) \text{ şi } u|_{\partial\Omega} = 0\},$$

şi operatorul diferenţial A definit pe acest spaţiu vectorial D cu formula:

$$(Au)(X) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(X)\cdot u \tag{7.5}$$

atunci Problema Dirichlet :

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(X) \cdot u = F(X), (\forall)\ X \in \Omega \\ \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{7.6}$$

este echivalentă cu problema următoare :

Să se determine $u \in D$ astfel încât să avem :

$$Au = F,$$

unde

$$D = \left\{u \mid u : \overline{\Omega} \to I\!R^1,\ u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)\ \text{şi}\ u|_{\partial\Omega} = 0\right\}. \tag{7.7}$$

În această formulare a Problemei Dirichlet condiţia la limită nu mai apare separat pentru că este inclusă în definiţia spaţiului vectorial D (adică domeniul de definiţie a lui A).

Problema unicităţii soluţiei clasice a Problemei Dirichlet revine la injectivitatea operatorului $A : D \to \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ iar problema existenţei soluţiei clasice revine la surjectivitatea operatorului A.

În cele ce urmează vom pune în evidenţă proprietăţi ale operatorului A pentru a răspunde la problema existenţei şi unicităţii soluţiei Problemei Dirichlet (7.6)

Teorema 7.1.1 *Operatorul A definit pe spaţiul de funcţii D cu formula (7.5) are urmatoarele proprietaţi:*

i) domeniul de definiţie D al operatorului A este un subspaţiu dens în spaţiul Hilbert $L^2(\Omega)$;

ii) operatorul A este liniar ;

iii) pentru orice $u,\ v \in D$ are loc egalitatea
$$\int_{\Omega} Au \cdot v dX = \int_{\Omega} Av \cdot u dX$$

Demonstraţie:
i) Presupunem cunoscut faptul că spaţiul vectorial $\mathcal{D}(\Omega)$ format cu funcţiile

reale u de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe Ω şi cu suport compact inclus în Ω:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{u \,|\, u : \Omega \to I\!R^1,\ u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),\ \text{supp}\, u \subset \Omega\}$$

este dens în $L^2(\Omega)$. Întrucât spaţiul de funcţii D include spaţiul vectorial $\mathcal{D}(\Omega)$ rezultă că spaţiul D este dens în $L^2(\Omega)$.
ii) Pentru a demonstra că A este liniar, vom arăta că

$$\begin{cases} A(u+v) = Au + Av \\ A(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot Au \end{cases} \qquad (\forall)\, u,\ v \in D,\ (\forall)\ \alpha \in I\!R^1.$$

Într-adevăr,

$$A(u+v) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \frac{\partial(u+v)}{\partial x_j}\right) + c(X)\cdot(u+v) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(X)\cdot u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) +$$
$$+ c(X)\cdot v = Au + Av.$$

şi

$$A(\alpha\cdot u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \frac{\partial(\alpha\cdot u)}{\partial x_j}\right) + c(X)\cdot(\alpha\cdot u) = \alpha\cdot Au,$$

ceea ce demonstrează liniaritatea lui A.
iii) Pentru $u, v \in D$ calculăm $\displaystyle\int_\Omega Au\cdot v dX$ şi găsim :

$$\int_\Omega Au\cdot v\, dX = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\cdot v\, dX + \int_\Omega c(X)\cdot u\cdot v\, dX$$
$$= -\int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\cos(\overline{u}, \overline{e}_i)\cdot v\, dS +$$

$$+\int_\Omega \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(X)\cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dX + \int_\Omega c(X)\cdot u\cdot v\, dX$$

$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(X)\cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dX + \int_\Omega c(X)\cdot u\cdot v\, dX$$

Calculând în continuare $\int_\Omega Av\cdot u\, dX$ găsim:

$$\int_\Omega Av\cdot u\, dX = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(X)\cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dX + \int_\Omega c(X)\cdot u\cdot v\, dX.$$

Deoarece $a_{ij}(X) = a_{ji}(X)$ rezultă $\int_\Omega Au\cdot v dX = \int_\Omega Av\cdot u dX$

Teorema 7.1.2 *Există $\gamma > 0$ astfel încât pentru orice $u \in D$ să avem*

$$\int_\Omega Au\cdot u dX \geq \gamma \int_\Omega u^2 dX \tag{7.8}$$

Demonstraţie: Calculăm $\int_\Omega Au\cdot u dX$ şi obţinem :

$$\begin{aligned}\int_\Omega Au\cdot u dX &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dX + \int_\Omega c(X) u^2(X)\, dX \geq \\ &\geq \int_\Omega \mu_0 \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dX + \int_\Omega c(X) u^2(X)\, dX\end{aligned}$$

Rămâne să evaluăm $\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dX$ pentru $u \in D$. Această evaluare constitue conţinutul unei teoreme care poartă numele lui Friedrichs. Conform acestei teoreme există o constantă $k > 0$, astfel încât pentru orice $u \in C^1(\bar\Omega)$ cu $u|_{\partial\Omega} = 0$ avem:

$$\int_\Omega |u(X)|^2 dX \leq k \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dX.$$

Admiţând pentru moment că această evaluare este adevărată putem continua evaluarea deja stabilită

$$\int_\Omega Au\cdot udX \geq \mu_0 \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dX + \int_\Omega c(X)u^2(X)dX,$$

şi găsim:

$$\int_\Omega Au\cdot udX \geq \frac{\mu_0}{k}\cdot \int_\Omega |u(X)|^2 dX + \int_\Omega c(X)u^2(X)dX \geq \frac{\mu_0}{k}\int_\Omega |u(X)|^2 dX$$

Astfel inegalitatea (7.8) a fost demonstrată.

Rămâne să demonstrăm acum teorema folosită în demonstraţia teoremei (7.1.2) denumită inegalitatea lui Friedrichs.

Teorema 7.1.3 *(inegalitatea lui Friedrichs) Există o constantă $k>0$, astfel încât pentru orice $u\in C^1(\bar{\Omega})$ cu $u|_{\partial\Omega}=0$ să avem:*

$$\int_\Omega |u(X)|^2 dX \leq k\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dX. \tag{7.9}$$

Demonstraţie: Domeniul Ω fiind mărginit există o translaţie $T: I\!R^n \to I\!R^n$, $(TX = X + X^0)$ astfel încât pentru orice $X'\in\Omega' = T\Omega$ să avem $x_i'\geq 0$. Deoarece

$$\int_{\Omega'} |u'(X')|^2\, dX' = \int_\Omega |u(X)|^2\, dX \quad \text{şi} \quad \int_{\Omega'} \left|\frac{\partial u'}{\partial x_i'}\right|^2 dX' = \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dX$$

unde $u'(X') = u(TX)$ şi $X' = TX$, rezultă că este suficient să se demonstreze inegalitatea (7.9) pe Ω'. Mai mult, Ω' fiind domeniu mărginit există $a>0$ astfel ca $\Omega'\subset\Gamma_a = \{X' \,|\, 0\leq x_i'\leq a\}$ şi prelungind cu 0 funcţia u' pe $\Gamma_a\diagdown\Omega'$ rezultă că, are loc:

$$\int_{\Omega'} |u'(X')|^2\, dX' = \int_{\Gamma_a} |u'(X')|^2\, dX' \quad \text{şi} \quad \int_{\Omega'} \left|\frac{\partial u'}{\partial x_i'}\right|^2 dX' = \int_{\Gamma_a} \left|\frac{\partial u'}{\partial x_i'}\right|^2 dX'$$

Astfel, ajungem la concluzia că, este suficient să demonstrăm inegalitatea (7.9) doar pentru $\Omega = \Gamma_a$. Pentru aceasta folosim formula lui Leibnitz-Newton

$$u(x_1, x_2, ...x_n) = \int_0^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, ...x_n)d\xi$$

din care utilizând Cauchy-Buniakovski rezultă:

$$\begin{aligned}
|u(X)| &\le \int_0^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},\xi,x_{i+1},...,x_n)d\xi \le \\
&\le \left(\int_0^{x_i} d\xi\right)^{1/2} \left(\int_0^{x_i} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1,...,x_{i-1},\xi,x_{i+1},...,x_n)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \le \\
&\le a^{1/2}\left(\int_0^{a} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}|(x_1,...,x_{i-1},\xi,x_{i+1},...x_n)\right|^2 d\xi\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

De aici obţinem:

$$\int_{\Gamma_a} |u(X)|^2 dX \le a^2 \int_{\Gamma_a} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dX$$

$$\int_{\Gamma_a} |u(X)|^2 dX \le \frac{a^2}{n} \int_{\Gamma_a} \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dX.$$

Astfel rezultă astfel că pentru $k = \dfrac{a^2}{n}$ are loc inegalitatea (7.9).

Teorema 7.1.4 *(de caracterizare variaţională a soluţiei ecuaţiei $Au = F$).*
Funcţia $u_0 \in D$ este soluţie a ecuaţiei $Au = F$ ($F \in C(\overline{\Omega})$) dacă şi numai dacă u_0 este punct de minim pentru funcţionala:

$$\Phi_F : D \to I\!R^1, \qquad \Phi_F(u) = \int_\Omega Au \cdot udX - 2\int_\Omega F \cdot udX. \tag{7.10}$$

Demonstraţie: Dacă $u_0 \in D$ este soluţie a ecuaţiei $Au = F$ atunci $Au_0 = F$ şi pentru orice $u \in D$ avem:

$$\begin{aligned}
\Phi_F(u) &- \Phi_F(u_0) = \int_\Omega Au\cdot udX - 2\int_\Omega F\cdot udX - \int_\Omega Au_0\cdot u_0 dX + 2\int_\Omega F\cdot u_0 dX = \\
&= \int_\Omega Au\cdot udX - 2\int_\Omega Au_0\cdot u - \int_\Omega Au_0\cdot u_0 dX + 2\int_\Omega Au_0\cdot u_0 dX = \\
&= \int_\Omega Au\cdot udX - \int_\Omega Au_0\cdot u - \int_\Omega u_0\cdot AudX + \int_\Omega Au_0\cdot u_0 dX = \\
&= \int_\Omega A(u-u_0)\cdot(u-u_0)dX \ge \gamma\int_\Omega |u-u_0|^2 dX \ge 0.
\end{aligned}$$

Rezultă astfel că u_0 este minim absolut pentru funcţionala Φ_F.

Reciproc, dacă presupunem că $u_0 \in D$ este punct de minim absolut pentru funcţionala Φ_F, atunci pentru orice $u \in D$ avem

$$\Phi_F(u) \geq \Phi_F(u_0)$$

Considerăm $u \in D$, u-fixat, $t \in \mathbb{R}^1$ şi remarcăm că:

$$\Phi_F(u_0 + tu) \geq \Phi_F(u_0)$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}^1$. Prin urmare funcţia

$$\varphi(t) = \Phi_F(u_0 + tu)$$

are un minim în $t = 0$. Din condiţia $\varphi'(0) = 0$ rezultă:

$$\int_\Omega (Au_0 - F)udX = 0 \quad (\forall)u \in D$$

Deoarece spaţiul vectorial D este dens în spaţiu Hilbert $L^2(\Omega)$ rezultă că $Au_0 = F$.

Observaţia 7.1.3 Această teoremă nu este o teoremă de existenţă pentru că nu stabileşte faptul că funcţionala Φ_F are un punct de minim absolut.

Teorema reduce însă problema existenţei şi unicităţii soluţiei clasice a ecuaţiei $Au = F$ la problema existenţiei şi unicităţii punctului de minim al funcţionalei Φ_F.

Teorema 7.1.5 *(teorema de unicitate)*
Pentru $F \in C(\bar{\Omega})$ există cel mult un $u_0 \in D$ astfel încât $Au_0 = F$.

Demonstraţie: Presupunem că pentru $F \in C(\bar{\Omega})$ există $u_1, u_2 \in D$ astfel încât $Au_1 = F$ şi $Au_2 = F$. De aici rezultă $\Phi_F(u_2) \geq \Phi_F(u_1)$ şi $\Phi_F(u_1) \geq \Phi_F(u_2)$. Prin urmare $\Phi_F(u_2) = \Phi_F(u_1)$. Ţinând seama de inegalitatea:

$$\Phi_F(u_1) - \Phi_F(u_2) \geq \gamma \int_\Omega |u_1 - u_2|^2 dX$$

rezultă în continuare că $\int_\Omega |u_1 - u_2|^2 dX = 0$ de unde rezultă egalitatea $u_1 = u_2$.

Observaţia 7.1.4 i) Teorema de unicitate demonstrează că Problema Dirichlet are cel mult o soluţie clasică.
ii) Existenţa unui minim absolut în D a funcţionalei $\Phi_F(u)$ nu este adevărată. Există exemple care demonstrează că în general Problema Dirichlet nu are soluţie clasică.

Pentru a asigura minimul absolut al funcţionalei Φ_F lărgim spaţiul vectorial D astfel ca să devină spaţiu Hilbert. În acest scop, pe $D \times D$ definim următoarea corespondenţă:

$$D \times D \ni (u, v) \to < u, v >_A = \int_\Omega Au \cdot vdX. \tag{7.11}$$

Lema 7.1.1 *Corespondenţa definită cu (7.11) este un produs scalar pe spaţiul vectorial D.*

Demonstraţie: prin verificare.

Observaţia 7.1.5 Pentru $(u, v) \in D$ are loc egalitatea:

$$< u, v >_A = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dX + \int_\Omega c(X)u(X)v(X)dX$$

Definiţia 7.1.4 *Completatul spaţiului vectorial* D *în norma* $\| \cdot \|_A$ *generată de produsul scalar*

$$< u, v >_A = \int_\Omega Au \cdot vdx$$

se numeşte spaţiul energetic al operatorului A *şi se notează cu* X_A.

Observaţia 7.1.6 Elementele spaţiului energetic X_A sunt elementele spaţiului vectorial D la care se mai adaugă limite în norma $\| \cdot \|_A$ de şiruri fundamentale u_n din D. Altfel spus, dacă $u \in X_A$ atunci $u \in D$ sau există $(u_n)_n$ cu $u_n \in D$ astfel încât $\|u_n - u\|_A \to 0$. Un element $u \in X_A$ are proprietatea: $u \in L^2(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ şi $u|_{\partial\Omega} = 0$

Observaţia 7.1.7 Spaţiul energetic X_A împreună cu produsul scalar $< u, v >_A$ este un spaţiu Hilbert.

Lema 7.1.2 *Funcţionala $\Phi_F : D \to I\!R'$ definită de formula*

$$\Phi_F(u) = \int_\Omega Au \cdot udX - 2\int_\Omega F \cdot udX \tag{7.12}$$

în care $F \in L^2(\Omega)$, se prelungeşte prin continuitate la o funcţională continuă $\widetilde{\Phi}_F$ definită pe spaţiul energetic X_A.

Demonstraţie: Arătăm la început că funcţionala $\Phi_F(u)$ definită cu (7.12) este continuă în topologia spaţiului energetic. În acest scop considerăm $u \in D$, un şir $(u_n)_n$, $u_n \in D$ cu proprietatea că $\|u_n - u\|_A \underset{n}{\to} 0$ şi apoi şirul

$$\Phi_F(u_n) = \int_\Omega Au_n \cdot u_n dX - 2\int_\Omega F \cdot u_n dX.$$

Arătăm că acest şir numeric este convergent şi limita lui este

$$\Phi_F(u) = \int_\Omega Au \cdot udX - 2\int_\Omega F \cdot udX.$$

Într-adevăr, avem:

$$\Phi_F(u_n) = \|u_n\|_A^2 - 2\int_\Omega F \cdot u_n dX$$

$$\Phi_F(u) = \|u\|_A^2 - 2\int_\Omega F \cdot udX$$

de unde rezultă:

$$|\Phi_F(u_n) - \Phi_F(u)| \leq |\ \|u_n\|_A^2 - \|u\|_A^2\ | + 2\int_\Omega |F| \cdot |u_n - u| dX \leq$$

$$\leq |\ \|u_n\|_A^2 - \|u\|_A^2\ | + 2\|F\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u_n - u\|_{L^2(\Omega).}$$

Deoarece convergenţa $\|u_n - u\|_A \to 0$ implică convergenţele $|\ \|u_n\|_A^2 - \|u\|_A^2| \to 0$ şi $\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, rezultă convergenţa

$$|\Phi_F(u_n) - \Phi_F(u)| \to 0.$$

Dacă $u \not\in D$ şi $u \in X_A$ atunci se defineşte $\Phi_F(u)$ cu

$$\Phi_F(u) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(X) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dX - 2 \int_\Omega F \cdot u dX$$

iar pentru $u_n \in D$, $\|u_n - u\|_A \to 0$ se reface acelaşi raţionament.

Teorema 7.1.6 *(de existenţă şi unicitate a punctului de minim absolut)*

Pentru orice $F \in L^2(\Omega)$ prelungita $\widetilde{\Phi}_F$ prin continuitate a funcţionalei Φ_F la spaţiul energetic X_A are un singur punct de minim.

Demonstraţie: Pentru a demonstra existenţa punctului de minim considerăm funcţionala liniară şi continuă

$$u \longmapsto \int_\Omega F \cdot u dX$$

definită pe spaţiul energetic X_A. Conform cu teoremei lui F. Riesz există o funcţie $u_F \in X_A$ astfel încât să avem:

$$< u_F, u >_A = \int_\Omega F \cdot u dX$$

pentru orice $u \in X_A$. Rămâne de arătat că u_F este punctul de minim absolut al funcţionalei $\widetilde{\Phi}_F(u)$.În acest scop calculăm $\widetilde{\Phi}_F(u_F)$ şi $\widetilde{\Phi}_F(u)$ pentru $u \in X_A$. Avem:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}_F(u_F) &= < u_F, u_F >_A -2 < F, u_F >_{L^2(\Omega)} = \|u_F\|_A^2 - 2\|u_F\|_A^2 = -\|u_F\|_A^2 \\
\widetilde{\Phi}_F(u) &= < u, u >_A -2 < F, u >_{L^2(\Omega)} \\
&= < u - u_F, u - u_F >_A + 2 < u_F, u >_A - < u_F, u_F >_A - 2 < F, u >_{L^2(\Omega)} \\
&= \|u - u_F\|_A^2 - \|u_F\|_A^2 = \|u - u_F\|_A^2 + \widetilde{\Phi}_F(u_F)
\end{aligned}$$

Această din urmă egalitate

$$\widetilde{\Phi}_F(u) = \|u - u_F\|_A^2 + \widetilde{\Phi}_F(u_F)$$

este adevărată pentru orice $u \in X_A$ şi arată că

$$\widetilde{\Phi}_F(u) \geq \widetilde{\Phi}_F(u_F).$$

Egalitatea arată şi faptul că

$$\widetilde{\Phi}_F(u) > \widetilde{\Phi}_F(u_F)$$

pentru orice $u \neq u_F$ ceea ce demonstrează unicitatea.

Observaţia 7.1.8 Dacă punctul de minim absolut u_F al funcţionalei prelungite $\tilde{\Phi}_F$ aparţine lui $D \subset X_A$ atunci $Au_F = F$, şi prin urmare u_F, este soluţie clasică a Problemei Dirichlet.

Observaţia 7.1.9 Dacă punctul de minim absolut u_F al funcţionalei prelungite $\tilde{\Phi}_F$ nu aparţine spaţiului vectorial $D \subset X_A$ atunci nu-i putem aplica operatorul A ca să vedem dacă este soluţie a ecuaţiei $Au = F$. *În acest caz este naturală întrebarea: Ce reprezintă u_F în contextul rezolvarii ecuaţiei $Au = F$?*

Vom da un răspuns la această întrebare arătând că operatorul A are o prelungire $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \to L^2(\Omega)$, numită prelungirea Friedrichs, unde $D \subset D(\tilde{A}) \subset X_A$ şi că u_F verifică $\tilde{A}u_F = F$. Aceasta înseamnă că funcţia u_F nu mai verifică condiţia de soluţie clasică :

$$u \in D \quad \text{şi} \quad -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(X) \cdot u = F$$

ci verifică doar condiţia : $u_F \in X_A$ şi

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \frac{\partial u_F}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega c(X) \cdot u_F \cdot v \, dX = \int_\Omega F \cdot v \, dX, \ (\forall)\, v \in X_A$$

Teorema 7.1.7 *(de prelungire a lui Friedrichs).*
Operatorul $G : L^2(\Omega) \to X_A$ definit prin $G(F) = u_F \in X_A$ unde u_F verifică

$$< u_F, u >_A = < F, u >_{L^2(\Omega)}, \quad (\forall)\, u \in X_A,$$

are următoarele proprietăţi:

i) G este liniar şi mărginit ;

ii) G este injectiv ;

iii) G este autoadjuct ;

iv) G este compact ;

v) $G^{-1} : Im\, G \subset X_A \to L^2(\Omega)$ *este o prelungire a lui A.*

Demonstraţie: Remarcăm la început că operatorul G este corect definit pentru că existenţa şi unicitatea funcţiei $u_F = G(F)$ a fost demonstrată.
i) Pentru $\alpha, \beta \in I\!R^1$, $F_1, F_2 \in L^2(\Omega)$ şi $u \in X_A$ avem:

$$\begin{aligned}
< G(\alpha F_1 + \beta F_2), u >_A &= < \alpha F_1 + \beta F_2, u >_{L^2(\Omega)} \\
&= < \alpha F_1, u >_{L^2(\Omega)} + < \beta F_2, u >_{L^2(\Omega)} \\
&= \alpha < F_1, u >_{L^2(\Omega)} + \beta < F_2, u >_{L^2(\Omega)} \\
&= < \alpha G(F_1) + \beta G(F_2), u >_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

de unde rezultă egalitatea :

$$G(\alpha F_1 + \beta F_2) = \alpha G(F_1) + \beta G(F_2)$$

care arată că operatorul G este liniar.

Pentru a demonstra mărginirea operatorului G considerăm $F \in L^2(\Omega)$ şi evaluăm $\|G(F)\|_A^2$. Avem:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_0^2}{k^2} \cdot \|G(F)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|G(F)\|_A^2 &= < F, G(F) >_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|F\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|G(F)\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

unde $k > 0$ este constanta din inegalitatea lui Friedrichs şi $\mu_0 > 0$ este constanta din condiţia de elipticitate.
Simplificând cu $\|G(F)\|_{L^2(\Omega)}$ în inegalitatea obţinută, rezultă:

$$\|G(F)\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{k^2}{\mu_0^2} \cdot \|F\|_{L^2(\Omega)}$$

care arată că operatorul $G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ este mărginit.

ii)

$$G(F)=0 \Rightarrow \quad < u_F, u >_A = 0, (\forall) u \in X_A$$

$$\Rightarrow \quad < F, u >_{L^2(\Omega)} = 0, (\forall) u \in X_A \Rightarrow F = 0$$

iii) Operatorul $G : L^2(\Omega) \to Im\, G \subset X_A$ fiind injectiv putem considera operatorul $G^{-1} : Im\, G \to L^2(\Omega)$ şi arătăm că este autoadjunct, adică :

$$< G^{-1}u, v >_{L^2(\Omega)} = < u, G^{-1}v >_{L^2(\Omega)}, \quad (\forall) u, v \in Im\, G.$$

Astfel,

$$\begin{aligned} < G^{-1}u, v >_{L^2(\Omega)} &= < u, v >_A = < v, u >_A = < G^{-1}v, u >_{L^2(\Omega)} \\ &= < u, G^{-1}v >_{L^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

Folosim acum acest rezultat pentru a demonstra că operatorul G este autoadjunct:

$$< G(F), H >_{L^2(\Omega)} = < G(F), G^{-1}(G(H)) >_{L^2(\Omega} =$$

$$= < G^{-1}(G(F)), G(H) >_{L^2(\Omega)} = < F, G(H) >_{L^2(\Omega)} .$$

iv) Prin faptul că operatorul G este compact înţelegem că transformă sfera închisă de rază unu din $L^2(\Omega)$ într-o mulţime compactă din $L^2(\Omega)$. Considerăm $F \in L^2(\Omega)$ cu $\|F\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$.
Calculăm $\|G(F)\|_A^2$ şi găsim:

$$\begin{aligned} \|G(F)\|_A^2 = < F, G(F) >_{L^2(\Omega)} &\leq \|F\|_{L^2(\Omega)}^2 \cdot \|G(F)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|F\|_{L^2(\Omega)} \cdot \frac{k}{\mu_0} \cdot \|G(F)\|_A. \end{aligned}$$

Simplificând cu $\|G(F)\|_A$ obţinem :

$$\|G(F)\|_A \leq \frac{k}{\mu_0} \cdot \|F\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{k}{\mu_0} ,$$

ceea ce arată că imaginea sferei închise de rază unu din $L^2(\Omega)$ prin operatorul G este o mulţime mărginită în spaţiul energetic X_A. Ştiind că o

mulţime mărginită în X_A este compactă în $L^2(\Omega)$ deducem că operatorul G este compact.

v) Arătăm acum că operatorul $G^{-1} : Im\, G \subset X_A \to L^2(\Omega)$ este o prelungire a operatorului A.

Din cele de până acum ştim că $G^{-1} : Im\, G \subset X_A \to L^2(\Omega)$ este un operator injectiv.

Considerăm $u \in D$ şi apoi $Au \in L^2(\Omega)$. Funcţia GAu aparţine la $Im\ G$ şi avem :

$$< GAu, v >_A = < Au, v >_{L^2(\Omega)} = < u, v >_A \qquad (\forall) v \in X_A.$$

Rezultă de aici egalitatea :

$$GAu = u, \quad (\forall)\, u \in D,$$

care demonstrează apartenenţa $u \in ImG$ şi egalitatea $G^{-1}u = Au$. Am arătat în acest fel că operatorul $G^{-1} : Im\, G \subset X_A \to L^2(\Omega)$ este o prelungire a operatorului A.

Definiţia 7.1.5 *Operatorul G^{-1} se numeşte prelungirea Friedrichs a operatorului A şi se notează cu $\tilde{A}$.*

Teorema 7.1.8 *(caracterizarea minimului absolut al funcţionalei Φ) Funcţia $u_F \in X_A$ este minimul absolut al funcţionalei*

$$\tilde{\Phi}_F : X_A \to I\!R^1, \ \tilde{\Phi}_F(u) = < u, u >_A - 2 < F, u >_{L^2(\Omega)}$$

dacă şi numai dacă u_F este soluţia ecuaţiei $\tilde{A}u = F$, unde $\tilde{A}$ este prelungirea Friedrichs a operatorului A.

Demonstraţie: Rezultatul se obţine imediat din construcţia prelungirii Friedrichs a operatorului A.

Observaţia 7.1.10 Din cele prezentate rezultă că pentru orice $F \in L^2(\Omega)$ ecuaţia $\tilde{A}u = F$ are o singură soluţie în spaţiul Hilbert X_A.

Definiţia 7.1.6 *Soluţia u_F a ecuaţiei $\tilde{A}u = F$ se numeşte soluţia generalizată a ecuaţiei $Au = F$.*

Observaţia 7.1.11 Dacă $u_F \in D \subset X_A$ atunci u_F este soluţie clasică a Problemei Dirichlet. Dacă $u_F \in X_A$ nu aparţine la D ($u_F \not\in D$) atunci ea verifică doar:

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \cdot \frac{\partial u_F}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega c(x) \cdot u_F(x) \cdot v(x) dx = \int_\Omega F(x) \cdot v(x) dx$$

pentru orice $v \in X_A$.

În continuare vom descrie o metodă de determinare a soluţiei generalizate u_F a ecuaţiei $Au = F$ (despre care ştim că există şi este unică). Metoda se bazează pe determinarea valorilor proprii şi vectorilor proprii ai prelungirii Friedrichs $\tilde{A}$.

Definiţia 7.1.7 *Un număr λ este valoare proprie pentru operatorul $\tilde{A}$ dacă există o funcţie u în $D(\tilde{A})$ (domeniul de definiţie al operatorului $\tilde{A}$), $u \neq 0$, astfel încât să avem:*

$$\tilde{A}u = \lambda \cdot u.$$

Teorema 7.1.9 *Pentru operatorul $\tilde{A}$ există un şir infinit de valori proprii*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_m \leq ...$$

şi corespunzător acestor valori proprii un şir infinit de funcţii proprii

$$u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$$

cu următoarele proprietăţi:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \lambda_n &= +\infty \\ < u_i, u_j >_{L^2(\Omega)} &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Demonstraţie: Operatorul $G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ este liniar autoadjunct şi complet continuu. Pe baza unei teoreme relative la această clasă de operatori liniari rezultă că, G admite un şir infinit de valori proprii şi un şir infinit de funcţii proprii. Valorile proprii ale lui G le notăm cu

$$\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ..., \frac{1}{\lambda_m}, ...$$

iar funcţiile proprii cu

$$u_1, u_2, ..., u_m, ...$$

Presupunem că aceste valori proprii sunt aranjate în şir astfel ca să avem:

$$\left|\frac{1}{\lambda_1}\right| \geq \left|\frac{1}{\lambda_2}\right| \geq ... \geq \left|\frac{1}{\lambda_m}\right| \geq ...$$

iar funcţiile proprii sunt alese astfel ca să avem

$$< u_i, u_j >_{L^2(\Omega)} = \delta_{ij}.$$

Ţinând seamă de egalitatea $\tilde{A} = G^{-1}$ rezultă că $\tilde{A}$ admite şirul de valori proprii $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ...$ şi şirul de funcţii proprii $u_1, u_2, ..., u_m, ...$

Arătăm acum că $\lambda_m > 0$ pentru orice m.
Într-adevăr din $G \cdot u_m = \frac{1}{\lambda_m} \cdot u_m$ rezultă că

$$< G \cdot u_m, u_m >_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\lambda_m} \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\lambda_m}.$$

Pe de altă parte,

$$< G \cdot u_m, u_m >_{L^2(\Omega)} = < u_m, u_m >_A \geq \gamma \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

şi astfel

$$\frac{1}{\lambda_m} \geq \gamma \|u_m\|^2_{L^2\Omega} > 0.$$

Arătăm acum că, $\widetilde{A}$ admite chiar un şir infinit de valori proprii. La început arătăm că mulţimea de definiţie ImG a operatorului $\widetilde{A}$ (formată din elementele $G(F)$ cu $F \in L^2(\Omega)$) este un spaţiu vectorial infinit dimensional. Pentru aceasta, fie u o funcţie de clasă C^∞ cu suport compact în Ω. Considerăm funcţia $F = Au$ şi observăm că u este soluţia clasică a Problemei Dirichlet

$$Au = F.$$

Rezultă că, u este şi soluţie generalizată a acestei probleme, ceea ce înseamnă că $G(F) = u$. Am arătat în acest fel că orice funcţie de clasă C^∞ cu suport compact inclus în Ω aparţine mulţimii $Im(G)$ şi ca urmare spaţiul vectorial $Im(G)$ este infinit dimensional.

Să presupunem acum prin absurd că, operatorul G are doar un număr finit de valori proprii diferite de zero: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Ţinând seama de faptul că G este autoadjunct şi compact rezultă de aici:

$$G(F) = \sum_{k=1}^{m} < G(F), u_k > u_k,\ (\forall)F \in L^2(\Omega).$$

Această egalitate arată că şirul $u_1, u_2, \ldots, u_m$ este bază în $Im(G)$ deci $Im(G)$ este spaţiu vectorial finit dimensional. Astfel, am ajuns la o contradicţie şi deci G admite un şir infinit de valori proprii. Încheiem demonstraţia observând că $\lim_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$.

Teorema 7.1.10 *Şirul de funcţii proprii $\{u_m\}_m$ ai operatorului $\widetilde{A}$ este un şir ortonormat complet în spaţiul Hilbert $L^2(\Omega)$, iar şirul de funcţii proprii $\left\{\frac{u_m}{\sqrt{\lambda_m}}\right\}_m$ este un şir ortonormat complet în spaţiul energetic X_A.*

Demonstraţia acestei teoreme este laborioasă şi nu o facem aici.

Suntem acum în măsură să formulăm următoarea teoremă referitoare la soluţia generalizată a ecuaţiei $Au = F$, $F \in L^2(\Omega)$.

Teorema 7.1.11 *Oricare ar fi $F \in L^2(\Omega)$, soluţia generalizată u_F a ecuaţiei $Au = F$ este dată de:*

$$u_F = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_m} < F, u_m >_{L^2(\Omega)} \cdot u_m$$

unde $\{u_m\}_m$ este şirul de funcţii proprii ale operatorului $\widetilde{A}$ ($\widetilde{A}-$ prelungirea Friedrichs a opertorului A) ortonormal şi complet în spaţiul Hilbert $L^2(\Omega)$.

Demonstraţie: Deoarece

$$u_F = \sum_{m=1}^{+\infty} < u_F, u_m >_{L^2} \cdot u_m \quad \text{sau} \quad u_F = \sum_{m=1}^{+\infty} < u_F, \frac{u_m}{\sqrt{\lambda_m}} >_A \cdot \frac{u_m}{\sqrt{\lambda_m}}$$

folosind egalitatea:

$$< u_F, v >_A = < F, v >_{L^2},\ (\forall)v \in X_A$$

avem că:

$$u_F = \sum_{m=1}^{+\infty} < F, \frac{u_m}{\sqrt{\lambda_m}} >_{L^2} \cdot \frac{u_m}{\sqrt{\lambda_m}} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_m} < F, u_m >_{L^2} \cdot u_m.$$

Exerciţii:

Fie $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$ şi operatorul A definit prin

$$Au = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

pentru $u \in D = \{u \in C^2(\Omega)$ şi $u|_{\partial\Omega}\}$.
Determinaţi soluţia generalizată a Problemei Dirichlet $Au = F$ unde:
a) $F(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$;
b) $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;
c) $F(x_1, x_2) = x_1 - x_2$;

R: Din $Au = \lambda u$ se obţin valorile proprii şi vectorii proprii:

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{n\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2$$

respectiv

$$u_{m,n} = \sin\frac{n\pi}{l_1}x_1 \cdot \frac{m\pi}{l_2}x_2.$$

Calculând $\|u_{m,n}\|_{L^2} = \frac{1}{2}\sqrt{l_1 \cdot l_2}$ se obţin vectorii bazei ortonormale

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \cdot \sin\frac{n\pi}{l_1}x_1 \cdot \sin\frac{m\pi}{l_2}x_2\right\}_{m,n}$$

Soluţia generalizată este: $u_F(x_1, x_2) = \sum\limits_{m=1}^{+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{n\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2}\cdot$

$$\cdot \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(F(x_1, x_2) \cdot \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \cdot \sin\frac{n\pi}{l_1}x_1 \cdot \sin\frac{m\pi}{l_2}x_2\right) dx_1 dx_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \cdot \sin\frac{n\pi}{l_1}x_1 \cdot \sin\frac{m\pi}{l_2}x_2$$

unde $F(x_1, x_2)$ este funcţia dată la a), b), c).

7.2 Problema Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţii parabolice

Fie $\Omega \subset I\!R^n$ un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ netedă (parţial netedă) şi funcţiile reale:

$$a_{ij}, c, u_0 : \overline{\Omega} \to I\!R^1,\ f:[0,+\infty) \times \overline{\Omega} \to I\!R^1,\ g : [0,+\infty) \times \partial\Omega \to I\!R^1$$

cu următoarele proprietăţi:

i) a_{ij} sunt funcţii de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$ şi $a_{ij} = a_{ji} \quad, i, j = \overline{1,n}$;

c este o funcţie continuă pe $\overline{\Omega}, u_0$ este o funcţie continuă pe $\overline{\Omega}$ şi de clasă C^2 pe Ω.

ii) există $\mu_0 > 0$ astfel încât pentru orice $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in I\!R^n$ să aibe loc inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \xi_i \cdot \xi_j \geq \mu_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad (\forall)\ X \in \overline{\Omega};$$

iii) $c(X) \geq 0, \quad (\forall)\ X \in \overline{\Omega}$;

iv) f este funcţie continuă pe $[0,\infty) \times \overline{\Omega}$ şi g este o funcţie continuă pe $[0,+\infty) \times \partial\Omega$.

Definiţia 7.2.1 *Problema care constă în determinarea funcţiilor reale u : $[0,+\infty) \times \overline{\Omega} \to I\!R^1$ care au următoarele proprietăţi:*

1) u este continuă pe $[0,+\infty) \times \overline{\Omega}$, de clasă C^1 pe $(0,+\infty) \times \Omega$ şi pentru orice $t \in (0,+\infty)$ fixat u este de clasă C^2 pe Ω.

$$2) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

$$+c(X) \cdot u(t,X) = f(t,X), (\forall)\ t>0 \text{ şi } (\forall) X \in \Omega \qquad (7.13)$$

$$3) \qquad u(t,X) = g(t,X), \quad (\forall)\ (t,X) \in [0,+\infty) \times \partial\Omega. \qquad (7.14)$$

$$4) \qquad u(0,X) = u_0(X), \quad (\forall) x \in \overline{\Omega}. \qquad (7.15)$$

se numeşte Problemă Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia parabolică.

Definiţia 7.2.2 *O funcţie u care verifică condiţiile din definiţia precedentă se numeşte soluţie clasică a Problemei Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia parabolică.*

Propoziţia 7.2.1 *Dacă există un domeniu* $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ *care include mulţimea* $\overline{\Omega}$ *şi o funcţie* $G : [0, +\infty) \times \Omega' \to \mathbb{R}^1$ *de clasă* C^2 *pe* $[0, +\infty) \times \Omega'$ *astfel încât*

$$G(t, X) = g(t, X) \ \forall (t, X) \in [0, +\infty) \times \partial\Omega,$$

atunci Problema Cauchy-Dirichlet neomogenă pentru ecuaţia parabolică, prin schimbarea de funcţie necunoscută $v(t, X) = u(t, X) - G(t, X)$ *se reduce la Problema Cauchy-Dirichlet omogenă pentru ecuaţia parabolică:*

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + c(X) \cdot v(t, X) = f(t, X) - \frac{\partial G}{\partial t} + $$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \frac{\partial G}{\partial x_j}\right) - c(X) \cdot G(t, X), \tag{7.16}$$
$$(\forall)\ t) > 0 \quad \text{şi} \quad (\forall) X \in \Omega$$

$$v(t, X) = 0 \quad (\forall)(t, X) \in [0, +\infty) \times \partial\Omega \tag{7.17}$$

$$v(0, X) = u_0(X) - G(0, X) \quad (\forall)\ X \in \overline{\Omega}. \tag{7.18}$$

Demonstraţie: prin verificare.

Observaţia 7.2.1 Problema Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia parabolică cu condiţii pe frontieră neomogene (prezentată în Def. 7.2.1), se reduce la o Problemă Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia parabolică cu condiţii pe frontieră omogene. Datorită acestui fapt, vom considera în continuare Problema Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia parabolică de tipul următor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + c(X)\cdot u(t,X) = f(t,X) \quad (7.19)$$

$$u(t,X) = 0 \quad (\forall)(t,X)\in[0,+\infty)\times\partial\Omega. \quad (7.20)$$

$$u(0,X) = u_0(X) \quad (\forall)\ X\in\overline{\Omega} \quad (7.21)$$

în care funcţiile a_{ij}, c, f au proprietăţile deja prezentate: (i), (ii), (iii), (iv), iar funcţia u_0 este continuă pe $\overline{\Omega}$ şi de clasă C^2 în Ω.

Definiţia 7.2.3 *O soluţie clasică a Problemei Cauchy-Dirichlet (7.19)-(7.21) este o funcţie* $u : [0,+\infty)\times\overline{\Omega}\to I\!R^1$ *care are următoarele proprietăţi: u este continuă pe* $[0,+\infty)\times\overline{\Omega}$*, este de clasă* C^1 *pe* $(0,+\infty)\times\Omega$ *şi este de clasă* C^2 *în* Ω *pentru* $(\forall)t\in(0,+\infty)$, t *- fixat şi verifică:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(X)\cdot u(t,X) = f(t,X)$$

$$(\forall)t>0 \ \ \text{şi} \ \ (\forall)\ X\in\Omega \quad (7.22)$$

$$u(t,X) = 0 \ \ (\forall)\ (t,X)\in[0,\infty)\times\partial\Omega \quad (7.23)$$

$$u(0,X) = u_0(X) \ \ (\forall)\ x\in\overline{\Omega}. \quad (7.24)$$

Dacă considerăm operatorul diferenţial A definit pe spaţiul de funcţii:

$$D = \{w | w : \overline{\Omega}\to I\!R^1, w\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega) \ \ \text{şi} \ \ w|_{\partial\Omega} = 0\},$$

cu formula:

$$Aw = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X)\cdot\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + c(X)\cdot w$$

atunci Problema Cauchy-Dirichlet (7.19)-(7.21) se scrie:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = f \\ u(0,X) = u_0. \end{cases} \quad (7.25)$$

În continuare, vom formula o problemă mai generală pentru care vom demonstra o teoremă de existenţă şi unicitate.

Teorema 7.2.1 *Dacă funcţia* $u : [0, +\infty) \times \overline{\Omega} \to I\!R^1$ *este soluţie clasică a Problemei Cauchy-Dirichlet (7.19)-(7.21), atunci funcţia* V *definită prin*

$$V(t)(X) = u(t, X)$$

are următoarele proprietăţi:

a) $V : [0, +\infty) \to L^2(\Omega)$ este continuă;

b) $V : (0, +\infty) \to L^2(\Omega)$ este de clasă C^1;

c) $V : (0, +\infty) \to X_A$ este continuă, unde X_A reprezintă spaţiul energetic al operatorului A.

d) $V(0) = u_0$.

e) $\dfrac{dV}{dt} + AV = F(t), \quad (\forall)\ t > 0$ unde $F(t)(X) = f(t, X)$.

Demonstraţie:
a) Fie $t_0 \in [0, +\infty)$ şi $\eta > 0$. Funcţia $u(t, X)$ este uniform continuă pe mulţimea compactă $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{\Omega}$ (dacă $t_0 = 0$, atunci $[0, \eta] \times \overline{\Omega}$).
Prin urmare, $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)\delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca
$(\forall)(t', X'), (t'', X'') \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{\Omega}$ cu $|t' - t''| < \delta(\varepsilon)$ şi $||X' - X''|| < \delta(\varepsilon)$ să avem:

$$|u(t', X') - u(t'', X'')| < \varepsilon / \sqrt{|\Omega|}$$

unde $|\Omega|$ este măsura lui Ω.
Rezultă de aici că are loc inegalitatea:

$$\int_\Omega |u(t, X) - u(t_0, X)|^2 dX < \varepsilon^2, \quad (\forall)\ t \ \text{ cu } \ |t - t_0| < \delta(\varepsilon).$$

Deducem de aici că, dacă $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ atunci

$$||V(t) - V(t_0)||_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

Aceasta demonstrează continuitatea funcţiei $V : [0, +\infty) \to L^2(\Omega)$ într-un punct oarecare t_0.

b) Pentru a demonstra că funcţia $V : (0, +\infty) \to L^2(\Omega)$ este de clasă C^1 se consideră un punct $t_0 \in (0, +\infty)$ şi cu un raţionament analog cu cel prezentat anterior se arată că:

$$\lim_{t \to t_0} \int_\Omega \left| \frac{u(t,X) - u(t_0,X)}{t - t_0} - \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, X) \right|^2 dX = 0$$

ceea ce arată că funcţia $V : (0, +\infty) \to I\!\!L^2(\Omega)$ este de clasă C^1 şi
$\dfrac{dV}{dt} + AV = F(t)$.
c) pentru a demonstra că funcţia $V : (0, +\infty) \to X_A$ este continuă se consideră $t_0 \in (0, +\infty)$ şi se arată că $\lim\limits_{t \to t_0} ||V(t) - V(t_0)||_{X_A} = 0$.
d) $V(0)(X) = u(0, X) = u_0(X)$.
e) s-a demonstrat împreună cu (b).
Fie acum $\widetilde{A}$ prelungirea Friedrichs, a operatorului A definit pe $D(\widetilde{A})$, F o funcţie $F : [0, +\infty) \to L^2(\Omega)$ continuă şi $V_0 \in L^2(\Omega)$. Considerăm problema Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} + \widetilde{A}V = F(t) \\ \\ V(0) = V_0 \end{cases} \tag{7.26}$$

Definiţia 7.2.4 *O soluţie a acestei probleme este o funcţie $V : [0, +\infty) \to L^2(\Omega)$ care are următoarele proprietăţi:*

a) $V \in C^1((0, +\infty); L^2) \cap C([0, +\infty), L^2)$

b) $V(t) \in D(\widetilde{A}), \quad (\forall)\ t \in (0, +\infty)$ şi $\dfrac{dV}{dt} + \widetilde{A}V = F(t)$.

c) $V(0) = V_0$.

Definiţia 7.2.5 *Problema Cauchy (7.26) va fi numită problema Cauchy abstractă pentru ecuaţia parabolică, iar o soluţie a acesteia va fi numită soluţie "tare" a Problemei Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia parabolică.*

Observaţia 7.2.2 Dacă $u(t, X)$ este o soluţie clasică a Problemei Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia parabolică, atunci funcţia V definită prin $V(t)(x) = u(t, X)$ este soluţie a problemei Cauchy abstracte pentru ecuaţia parabolică.

Teorema 7.2.2 *Problema Cauchy abstractă (7.26) pentru ecuaţia parabolică are cel mult o soluţie.*

Demonstraţie: Fie V_1, V_2 două soluţii ale problemei (7.26) şi $V = V_1 - V_2$. Funcţia V verifică

$$\frac{dV}{dt} + \widetilde{A}V = 0 \text{ şi } V(0) = 0.$$

Rezultă de aici egalitatea

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||V||^2_{L^2(\Omega)} + ||V||^2_A = 0$$

din care rezultă inegalitatea

$$\frac{d}{dt}||V||^2_{L^2(\Omega)} \leq 0.$$

Funcţia $||V||^2_{L^2(\Omega)}$ este pozitivă, nulă pentru $t = 0$ şi conform inegalităţii, descreşte. Rezultă că $||V||^2_{L^2(\Omega)} = 0$, $(\forall)\ t \geq 0$, de unde $V_1 = V_2$.

Teorema 7.2.3 *Dacă funcţia* $F : [0, +\infty) \to L^2(\Omega)$ *este de clasă* C^1 *pe* $[0, +\infty)$ *atunci problema Cauchy abstractă pentru ecuaţia parabolică are o soluţie unică.*

Demonstraţie: Va trebui să arătăm doar că problema (7.26) are soluţie, unicitatea o avem deja în baza teoremei precedente.
Presupunem că avem o soluţie şi, pentru $t \in [0, +\infty)$ o dezvoltăm după sistemul ortonormat complet de funcţii proprii $(u_m)_{m\in I\!N}$ ale operatorului $\widetilde{A}$:

$$V(t) = \sum_{m=1}^{\infty} < V(t), u_m >_{L^2(\Omega)} \cdot u_m$$

Şirul corespunzător de valori proprii va fi notat cu $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \ldots$
Procedăm la fel cu $F(t)$ şi V_0:

$$F(t) = \sum_{m=1}^{\infty} < F(t), u_m >_{L^2(\Omega)} \cdot u_m$$

$$V_0 = \sum_{m=1}^{\infty} < V_{(0)}, u_m >_{L^2(\Omega)} \cdot u_m$$

Notăm:

$$v_m(t) = < V(t), u_m >_{L^2(\Omega)}$$
$$f_m(t) = < F(t), u_m >_{L^2(\Omega)}$$
$$v_m^0(t) = < V_0, u_m >_{L^2(\Omega)}$$

şi din ecuaţia

$$\frac{dV}{dt} + \widetilde{A}V = F(t)$$

şi condiţia iniţială

$$V(0) = V_0$$

deducem:

$$\frac{dv_m}{dt} + \lambda_m \cdot v_m = f_m, \quad v_m(0) = v_m^0 \quad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Aceste probleme cu date iniţiale au soluţiile date de formula

$$v_m(t) = v_m^0 e^{-\lambda_m t} + \int_0^t e^{-\lambda_m (t-s)} \cdot f_m(s) ds \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

de unde rezultă că soluţia $V(t)$ a Problemei Cauchy abstracte (7.26) verifică egalitatea:

$$V(t) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m^0 e^{-\lambda_m t} \cdot u_m + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\lambda_m (t-s)} \cdot f_m(s) ds \right) \cdot u_m. \quad (7.27)$$

Vom arăta acum că, dacă $V_0 \in L^2(\Omega)$ şi funcţia $F : [0, +\infty) \to L^2(\Omega)$ este de clasă C^1 pe $[0, +\infty)$, atunci membrul drept al formulei (7.27) defineşte o funcţie $V(t)$ care este soluţie pentru problema Cauchy abstractă, adică V are proprietăţile (a), (b), (c) din Definiţia (7.26).
În prima etapă, trebuie demonstrată convergenţa seriilor din membrul drept al egalităţii (7.27) şi examinată "netezimea" funcţiilor care sunt sumele acestor serii.
Deoarece $\{u_m\}_m$ este un sistem ortonormat complet în $L^2(\Omega)$, din convergenţa seriei numerice $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |v_m^0|^2 \cdot e^{-2\lambda_m t}$ rezultă convergenţa în $L^2(\Omega)$ a seriei de

funcţii $\sum\limits_{m=1}^{\infty} v_m^0 \cdot e^{-\lambda_m t} \cdot u_m$. Seria $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |v_m^0|^2 \cdot e^{-2\lambda_m t}$, $(\forall)$ $t \geq 0$, este majorată de seria numerică $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |v_m^0|^2$ care este convergentă ($V_0 \in L^2(\Omega)$). Rezultă astfel că, seria $\sum\limits_{m=1}^{\infty} v_m^0 \cdot e^{-\lambda_m t} \cdot u_m$ este uniform convergentă pentru orice $t \geq 0$ în spaţiul $L^2(\Omega)$ şi suma ei este funcţie continuă de t.

Pentru a arăta că seria $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^t e^{-\lambda_m (t-s)} \cdot f_m(s) ds \right) \cdot u_m$ converge în $L^2(\Omega)$ uniform pe un segment oarecare $[0, T]$, procedăm după cum urmează: considerăm seria $\sum\limits_{m=1}^{\infty} | \int\limits_0^t e^{-\lambda_m (t-s)} \cdot f_m(s) ds|^2$, şi o majorăm astfel:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_0^t e^{-\lambda_m (t-s)} \cdot f_m(s) ds \right|^2 \leq \\
\leq \quad & \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t e^{-2\lambda_m (t-s)} ds \cdot \int_0^t f_m^2(s) ds = \\
= \quad & \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\lambda_m t} \cdot \frac{1}{2\lambda_m} e^{-2\lambda_m s} \Big|_0^t \cdot \int_0^t f_m^2 ds = \\
= \quad & \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\lambda_m} - \frac{1}{2\lambda_m} e^{-2\lambda_m t} \right) \cdot \int_0^t f_m^2(s) ds = \\
= \quad & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_m} (1 - e^{-2\lambda_m t}) \cdot \int_0^t f_m^2(s) ds \leq \\
\leq \quad & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^t f_m^2(s) ds = \frac{1}{2\lambda_1} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t f_m^2(s) ds.
\end{aligned}$$

seria $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m^2(s)$ converge pentru orice $s \in [0, T]$ iar funcţiile sunt continue şi pozitive şi suma seriei $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m^2(s) = ||F(s)||^2$ este funcţie continuă. Con-

form teoremei lui Dini rezultă că, seria $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m^2(s)$ converge pe $[0,T]$, de unde rezultă convergenţa uniformă a seriei $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \int\limits_0^t |f_m(s)|^2\, ds$ pe $[0,T]$. Se obţine de aici că seria $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^t e^{-\lambda_m(t-s)} f_m(s) ds \right) u_m$ este convergentă în $L^2(\Omega)$ uniform în raport cu $t \in [0,T]$ şi suma ei este funcţie continuă de t.
Am obţinut în acest fel că, funcţia $V(t)$ definită de (7.27) este funcţie continuă de la $[0,+\infty)$ la $L^2(\Omega)$.

Vom arăta în continuare că $V : (0,+\infty) \to L^2(\Omega)$ este funcţie de clasă C^1. Aceasta rezultă din convergenţa uniformă pe $[t_0,+\infty)$ (cu $0 < t_0 < T$ oarecare) a seriilor

$$\sum_{m=1}^{\infty} v_m^0 e^{-\lambda_m t} u_m$$

şi $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^t e^{-\lambda_m(t-s)} f_m(s) ds \right) u_m$ şi a seriilor obţinute din acestea prin derivare termen cu termen.
Pentru derivata seriei $\sum\limits_{m=1}^{\infty} v_m^0 e^{-\lambda_m t} u_m$, adică pentru seria:

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m v_m^0 e^{-\lambda_m t} u_m$$

convergenţa uniformă rezultă din estimările:

$$\lambda_m^2 (v_m^0)^2 e^{-2\lambda_m t} \le \lambda_m^2 (v_m^0)^2 e^{-2\lambda_m t_0} \le c \cdot (v_m^0)^2$$

unde c este o constantă independentă de m şi t. Pentru derivata celei de a doua serii, adică pentru seria

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[f_m(t) - \lambda_m \int\limits_0^t e^{-\lambda_m(t-s)} f_m(s) ds \right] u_m$$

convergenţa uniformă se obţine din estimarea:

$$|f_m(t) - \lambda_m \int\limits_0^t e^{-\lambda_m(t-s)} \cdot f_m(s)|^2 =$$

$$= |f_m(0)e^{-\lambda_m t} + \int\limits_0^t f'_m(s)e^{-\lambda_m(t-s)}ds|^2 \leq$$

$$\leq 2|f_m(0)|^2 e^{-2\lambda_1 t_0} + 2\int\limits_0^t |f'_m(s)|^2 ds \cdot \int\limits_0^t e^{-2\lambda_m(t-s)}ds \leq$$

$$\leq |f_m(0)|^2 e^{-2\lambda_1 t_0} + \frac{1}{\lambda_1}\int\limits_0^T |f'_m(s)|^2 ds.$$

Din această estimare şi din ipoteza că $F \in C^1([0,+\infty), L^2)$ rezultă convergenţa uniformă a seriei derivate şi continuitatea sumei.
Apartenenţa $V \in C^1((0,+\infty), L^2)$ este acum imediată.
Pentru apartenenţa $V(t) \in D(\widetilde{A})$ dacă $t > 0$ remarcăm că domeniul $D(\widetilde{A})$ poate fi caracterizat astfel:

$$D(\widetilde{A}) = \left\{ v = \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m | \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 \cdot c_m^2 < +\infty \right\}.$$

Această caracterizare şi raţionamentele precedente arată că:
$V(t) \in D(\widetilde{A}), \quad (\forall)\ t > 0.$
Verificarea egalităţilor: $\dfrac{dV}{dt} + \widetilde{A}V = F(t)$ şi $V(0) = V_0$ este imediată.

Exerciţiul 1
Găsiţi Problema Cauchy abstractă în cazul Problemei Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t > 0, \quad x \in (0,l) \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

şi determinaţi soluţia "tare".

Răspuns:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,\ k \in I\!N^*,\ u_k = \sin\frac{k\pi x}{l}V$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot e^{-(\frac{ak\pi}{l})^2\cdot t}\sin\frac{k\pi x}{l} \quad \text{unde} \quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

Exerciţiul 2
Determinaţi soluţiile următoarelor Probleme Cauchy-Dirichlet:

$$a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x,t) \in (0,1)\times(0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 3\sin 2\pi x, & x \in [0,1] \end{cases}$$

R: $u(x,t) = 3\cdot e^{-16\pi^2 t}\cdot\sin 2\pi x$

$$b)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-4t}\sin x & x \in (0,\pi)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 4\sin x\cdot\cos x, & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

R: $u(x,t) = t\cdot e^{-4t}\cdot\sin x + 2e^{-16t}\cdot\sin 2x$

$$c)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 1, & (x,t) \in (0,1)\times(0,+\infty) \\ u(0,t) = t+1, & u(1,t) = 2t+1, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = 1, & x \in [0,1] \end{cases}$$

R: $u(x,t) = t + 1 + x\cdot t$

7.3 Calculul simbolic şi numeric al soluţiei Problemei Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţii parabolice

Calculul simbolic al soluţiei unei probleme Cauchy-Dirichlet nu poate fi realizat cu funcţia *pdsolve*. În astfel de cazuri se trece la rezolvarea numerică. Pentru exemplificare, vom considera trei Probleme Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţii parabolice a căror soluţie o vom determina numeric folosind funcţia *pdsolve* cu sintaxa pentru calcul numeric:

pdsolve(PDE or PDE system, conds, type=numeric, other option);

în care:

$PDEorPDEsystem$	- ecuaţia cu derivate parţiale pe care dorim să o rezolvăm sau sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale
conds	- condiţiile iniţiale şi condiţiile la limită
type = numeric	- indică rezolvarea utilizând metode numerice
otheroption	- diferite opţiuni (de ex. metoda numerică, nr. de puncte, etc.)

Exemplul 1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 1 \end{cases}$$

Heat equation

```
> PDE1 :=diff(u(x,t),t)=1/10*diff(u(x,t),x,x);
```

$$PDE1 := \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = 1/10\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$$

```
> IBC1 := {u(0,t)=0, u(1,t)=0, u(x,0)=1};
```

$$IBC1 := \{u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, u(x,0) = 1\}$$

```
> pds1 := pdsolve(PDE1,IBC1,numeric);
```

pds1 := module () local INFO; export plot, plot3d, animate, value, settings; option ‘Copyright (c) 2001 by Waterloo Maple Inc. All rights reserved.‘; end module

```
> p1 := pds1:-plot(t=0):
  p2 := pds1:-plot(t=1/10):
  p3 := pds1:-plot(t=1/2):
  p4 := pds1:-plot(t=1):
  p5 := pds1:-plot(t=2):
  plots[display]({p1,p2,p3,p4,p5},
  title=‘Heat profile at t=0,0.1,0.5,1,2‘);
```

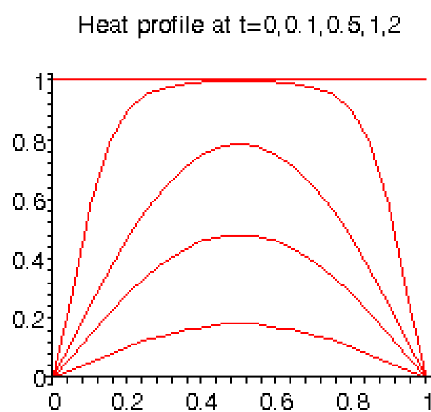


Figura 30

```
> pds1:-plot3d(t=0..1,x=0..1,axes=boxed);
```

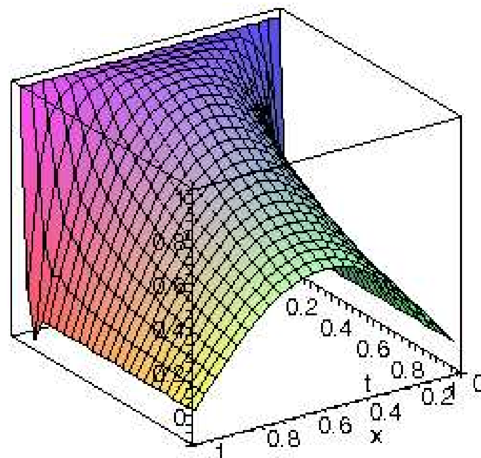


Figura 31

Exemplul 2:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 4\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x,t) + e^{-4t}\cdot \sin x \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 4\cos x \sin x \end{cases}$$

Heat equation

```
> PDE2 :=
diff(u(x,t),t)=4*diff(u(x,t),x,x)+(exp(-4*t))*sin(x);
```

$$PDE2 := \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = 4\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + e^{-4\,t}\sin(x)$$

```
> IBC2 := {u(0,t)=0,u(Pi,t)=0,u(x,0)=4*cos(x)*sin(x)};
```

$$IBC2 := \{u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0, u(x,0) = 4\,\cos(x)\sin(x)\}$$

```
> pds2 := pdsolve(PDE2,IBC2,numeric);
```

pds1 := module () local INFO; export plot, plot3d, animate, value, settings; option ‘Copyright (c) 2001 by Waterloo Maple Inc. All rights reserved.‘; end module

```
> p6 := pds2:-plot(t=0):
  p7 := pds2:-plot(t=1/10):
```

```
p8 := pds2:-plot(t=1/2):
p9 := pds2:-plot(t=1):
p10 := pds2:-plot(t=2):
plots[display]({p6,p7,p8,p9,p10},
title=`Heat profile at t=0,0.1,0.5,1,2`);
```

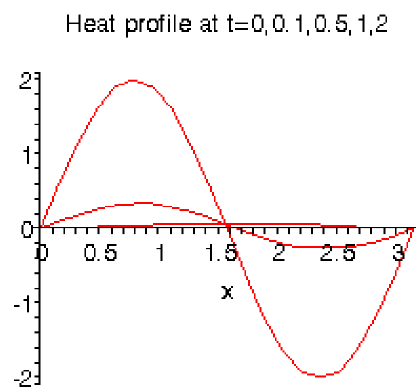


Figura 32

```
> pds2:-plot3d(t=0..1,x=0..1,axes=boxed);
```

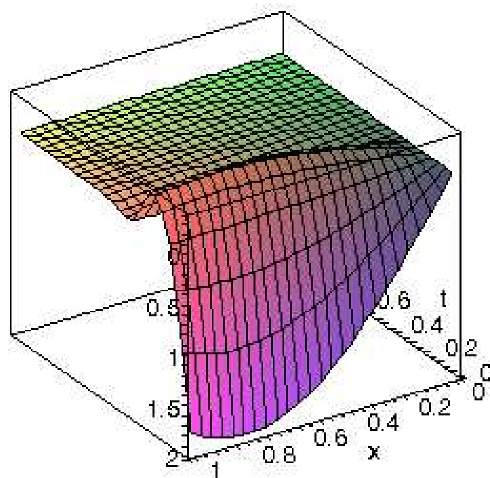


Figura 33

Exemplul 3:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + t \cdot cosx \\ u(0,t) = t, u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos 2x + \cos 3x \end{cases}$$

Heat equation

```
> PDE3 :=
diff(u(x,t),t)=diff(u(x,t),x,x)+t*cos(x);
```

$$PDE3 := \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + t\cos(x)$$

```
> IBC3 := {u(0,t)=t,u(Pi,t)=0,u(x,0)=cos(2*x)+cos(3*x)};
```

$$IBC3 := \{u(\pi,t) = 0, u(0,t) = t, u(x,0) = \cos(2\,x) + \cos(3\,x)\}$$

```
> pds3 := pdsolve(PDE3,IBC3,numeric);
```

pds1 := module () local INFO; export plot, plot3d, animate, value, settings; option ‘Copyright (c) 2001 by Waterloo Maple Inc. All rights reserved.‘; end module

```
> q1 := pds3:-plot(t=0):
  q2 := pds3:-plot(t=1/10):
  q3 := pds3:-plot(t=1/2):
  q4 := pds3:-plot(t=1):
  q5 := pds3:-plot(t=2):
  plots[display]({q1,pq2,q3,q4,q5},
  title=‘Heat profile at t=0,0.1,0.5,1,2‘);
```

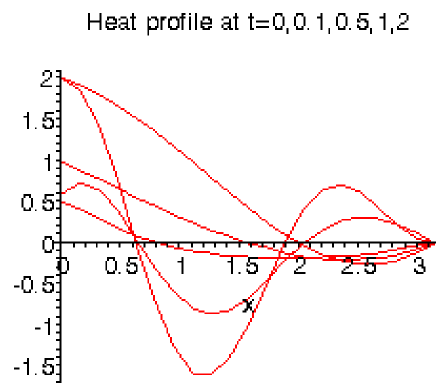


Figura 34

```
> pds3:-plot3d(t=0..1,x=0..1,axes=boxed);
```

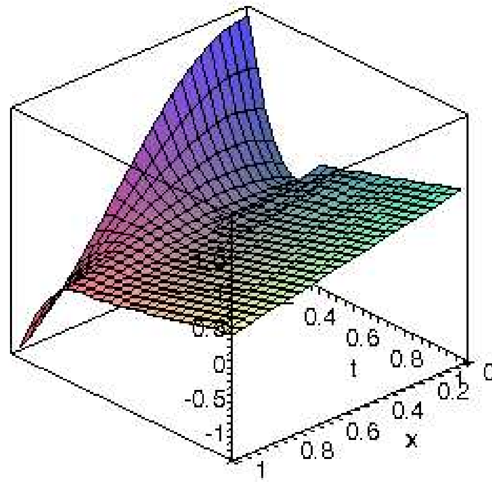


Figura 35

7.4 Problema Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţii hiperbolice

Fie $\Omega \subset I\!R^n$ un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$ netedă (parţial netedă) şi funcţiile reale a_{ij}, c, u_0, $u_1 : \overline{\Omega} \to I\!R^1$, $f : [0, +\infty) \times \overline{\Omega} \to I\!R^1$, $g : [0, +\infty) \times \partial\Omega \to I\!R^1$ cu următoarele proprietăţi:

i) a_{ij} sunt funcţii de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$ şi $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$;
c este continuă pe $\overline{\Omega}$;
u_0 este de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$ şi de clasă C^2 pe Ω;
u_1 este continuă pe $\overline{\Omega}$ şi de clasă C^1 pe Ω.

ii) există $\mu_0 > 0$ astfel încât pentru orice $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in I\!R^n$ să aibe loc inegalitatea:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X) \cdot \xi_i \cdot \xi_j \geq \mu_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad (\forall)X \in \overline{\Omega}$$

iii) $c(X) \geq 0, \quad (\forall)X \in \overline{\Omega}$;

iv) funcţiile $f : [0, +\infty)\times\overline{\Omega} \to I\!R^1$ şi $g : [0, +\infty)\times\partial\Omega \to I\!R^1$ sunt continue.

Definiţia 7.4.1 *Problema care constă în determinarea funcţiilor reale* $u : [0, +\infty) \times \overline{\Omega} \to I\!R^1$ *continue pe* $[0, +\infty) \times \overline{\Omega}$*, de clasă* C^1 *pe* $[0, +\infty) \times \overline{\Omega}$ *şi de clasă* C^2 *pe* $(0, +\infty) \times \Omega$*, care au următoarele proprietăţi:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(X)\cdot u = f(t, X), \tag{7.28}$$

$$(\forall)(t, X) \in (0, +\infty)\times\Omega$$

$$u(t, X) = g(t, X), \ (\forall)(t, X) \in [0, +\infty) \times \partial\Omega. \tag{7.29}$$

$$u(0, X) = u_0(X), \ (\forall)X \in \overline{\Omega}. \tag{7.30}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, X) = u_1(X), \ (\forall)X \in \overline{\Omega}. \tag{7.31}$$

se numeşte Problemă Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia hiperbolică.

Definiţia 7.4.2 *O funcţie u care verifică condiţiile din definiţia precedentă se numeşte soluţie clasică a Problemei Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia hiperbolică.*

Propoziţia 7.4.1 *Dacă există un domeniu* $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ *care include domeniul* $\overline{\Omega}$ *şi o funcţie* $G : [0, +\infty) \times \Omega' \to \mathbb{R}^1$ *de clasă* C^2 *pe* $[0, +\infty) \times \Omega'$ *astfel încât*

$$G(t, X) = g(t, X), \ (\forall)(t, X) \in (0, +\infty) \times \partial\Omega$$

atunci Problema Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia hiperbolică, prin schimbarea de funcţie necunoscută $v(t, X) = u(t, X) - G(t, X)$*, se reduce la Problema Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia hiperbolică cu condiţii nule pe frontieră:*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + c(X) \cdot v(t, X) =$$
$$= f(t, X) - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_j} \right) - c(X) \cdot G(t, X), \tag{7.32}$$
$$(\forall)(t, X) \in (0, +\infty) \times \Omega$$

$$v(t, X) = 0, \ (\forall)(t, X) \in [0, +\infty) \times \Omega. \tag{7.33}$$

$$u(0, X) = u_0(X) - G(0, X) = v_0(X), \ (\forall)X \in \overline{\Omega}. \tag{7.34}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(0, X) = u_1(X) - \frac{\partial G}{\partial t}(0, X) = v_1(X), \ (\forall)X \in \overline{\Omega}. \tag{7.35}$$

Demonstraţie: Prin verificare.

Observaţia 7.4.1 Propoziţia reduce problema (7.28-7.31) cu condiţie nenulă pe frontieră la problema (7.32-7.35), în care condiţia la frontieră (7.33) este zero:

$$v(t, X) = 0, \ (\forall)(t, X) \in [0, +\infty) \times \partial\Omega.$$

De aceea, vom studia existenţa şi unicitatea soluţiei Problemei Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia hiperbolică cu condiţia la frontieră nulă.

Vom considera în continuare Probleme Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia hiperbolică de următoarea formă:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X)\cdot\frac{\partial u}{\partial X_j}\right) + c(X)\cdot u(t,X) = f(t,X), \quad (t,X)\in(0,+\infty)\times\Omega \tag{7.36}$$

$$u(t,X) = 0,\ (\forall)(t,X) \in [0,+\infty)\times\Omega. \tag{7.37}$$

$$u(0,X) = u_0(X),\ (\forall)x \in \overline{\Omega}. \tag{7.38}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,X) = u_1(X),\ (\forall)X \in \overline{\Omega}. \tag{7.39}$$

în care funcţiile a_{ij}, c, f au proprietăţile $(i), (ii), (iii), (iv)$ anterior prezentate; funcţia u_0 este de clasă C^1 pe $\overline{\Omega}$ şi de clasă C^2 în Ω; funcţia u_1 este continuă pe $\overline{\Omega}$ şi de clasă C^1 în Ω.
O soluţie clasică a acestei probleme este o funcţie $u : [0,+\infty)\times\overline{\Omega} \to I\!R^1$ care este de clasă C^1 pe $[0,+\infty)\times\overline{\Omega}$, şi este de clasă C^2 pe $(0,+\infty)\times\Omega$ şi verifică:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(X)\cdot u(t,X) = f(t,X);\ (t,X)\in(0,+\infty)\times\Omega \\ u(t,X) = 0,\ (\forall)(t,X) \in [0,+\infty)\times\Omega. \\ u(0,X) = u_0(X),\ (\forall)X \in \overline{\Omega}. \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,X) = u_1(X),\ (\forall)X \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Considerând operatorul diferenţial A definit pe spaţiul de funcţii

$$D = \{w | w : \overline{\Omega} \to I\!R^1; w \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega),\ w_{|\partial\Omega} = 0\}$$

cu formula

$$Aw = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(X)\cdot\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + c(X)\cdot w(X)$$

ecuaţia hiperbolică poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A\cdot u(t,X) = f(t,X),\ (\forall)(t,X)\in(0,+\infty)\times\Omega.$$

Teorema 7.4.1 *Dacă funcţia $u:[0,+\infty)\times\overline{\Omega}\to I\!R^1$ este soluţie clasică a problemei (7.36-7.39), atunci funcţia U definită prin:*

$$U(t)(X) = u(t,X)$$

are următoarele proprietăţi:

i) $U:[0,+\infty)\to L^2(\Omega)$ *este de clasă* C^1 *pe* $[0,+\infty)$.

ii) $U:[0,+\infty)\to H_0^1$ *este funcţie continuă;*

iii) $U(0)=u_0$ *şi* $U'(0)=u_1$.

Demonstraţie:

i) Arătăm la început că funcţia $U:[0,+\infty]\to L^2(\Omega)$ este derivabilă în orice $t_0\in[0,+\infty)$. Pentru aceasta, considerăm $t_0\in[0,+\infty)$ şi apoi raportul

$$\frac{1}{t-t_0}[U(t)-U(t_0)]\in L^2(\Omega)$$

şi arătăm că acest raport tinde la $\frac{\partial u}{\partial t}(t_0,x)\in L^2(\Omega)$ în norma $L^2(\Omega)$ atunci când $t\to t_0$. Aceasta înseamnă că trebuie să arătăm egalitatea:

$$\lim_{t\to t_0}\int_\Omega\left|\frac{1}{t-t_0}\left[U(t)-U(t_0)\right](X)-\frac{\partial u}{\partial t}(t_0,X)\right|^2 dX = 0.$$

Folosind teorema creşterilor finite a lui Lagrange scriem:

$$\frac{1}{t-t_0}\left[U(t)-U(t_0)\right](X) = \frac{1}{t-t_0}\left[u(t,X)-u(t_0,X)\right] = \frac{\partial u}{\partial t}(t(X),X)$$

cu $|t(X) - t_0| < |t - t_0|$.

Prin urmare are loc egalitatea:

$$\left|\frac{1}{t - t_0}\left[U(t) - U(t_0)\right](X) - \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, X)\right|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t(X), X) - \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, X)\right|^2$$

cu $|t(X) - t_0| < |t - t_0|$.

Funcţia $(t, X) \to \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, X)$ este continuă pe $[0, +\infty) \times \overline{\Omega}$ şi deci este uniform continuă pe o mulţime de forma $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{\Omega}$ $(\eta > 0)$ şi prin urmare:

$$(\forall)\varepsilon > 0,\ (\exists)\delta(\varepsilon) \text{ a.î. } (\forall)(t', X'), (t", X") \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{\Omega}$$

cu $|t' - t"| < \delta$ şi $|X' - X"| < \delta$ avem

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t', X') - \frac{\partial u}{\partial t}(t", X")\right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{|\Omega|}}.$$

unde $|\Omega|$ este măsura domeniului Ω. Rezultă de aici că, dacă $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$, atunci are loc inegalitatea:

$$\int_\Omega \left|\frac{1}{t - t_0}[U(t) - U(t_0)](X) - \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, X)\right|^2 dX < \varepsilon.$$

În acest fel, egalitatea

$$\lim_{t \to t_0} \int_\Omega \left|\frac{1}{t - t_0}[U(t) - U(t_0)](X) - \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, X)\right|^2 dX = 0$$

a fost demonstrată.

Va trebui în continuare să arătăm că funcţia $U' : [0, +\infty) \to L^2(\Omega)$ este continuă. Aceasta revine la a demonstra egalitatea:

$$\lim_{t \to t_0} \|U'(t) - U'(t_0)\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Pentru aceasta, vom folosi egalitatea

$$\|U'(t) - U'(t_0)\|_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t, X) - \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, X)\right|^2 dX$$

şi faptul că funcţia $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ este continuă pe $[0, +\infty) \times \overline{\Omega}$. Din continuitatea funcţiei $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ rezultă că aceasta este uniform continuă pe o mulţime de forma $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{\Omega}$, $(y > 0)$ şi prin urmare:

$$(\forall)\varepsilon > 0,\ (\exists)\delta(\varepsilon)\ \text{a.î.}(\forall)(t', X'), (t", X") \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{\Omega}$$

dacă $|t' - t"| < \delta$ şi $|X' - X"| < \delta$ atunci

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t', X') - \frac{\partial u}{\partial t}(t", X") \right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{|\Omega|}}.$$

Rezultă de aici că, dacă $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ avem: $\|U'(t') - U'(t_0)\| < \varepsilon$.

ii) Să arătăm că U ca funcţie cu valori în spaţiul:

$$H_0^1 = \left\{ u \in L^2(\Omega) \middle| (\exists)\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ şi } u_{|\partial\Omega} = 0 \right\}$$

este continuă. Faptul că, pentru orice $t \in [0, +\infty)$ funcţia $U(t)$ aparţine spaţiului H_0^1 rezultă din proprietăţile soluţiei $u(t, X) = U(t)(X)$. Trebuie doar să evaluăm norma $\|U(t) - U(t_0)\|_{H_0^1}$ şi să arătăm că aceasta tinde la zero dacă $t \to t_0$.

Avem:

$$\begin{aligned}
\|U(t) - U(t_0)\|_{H_0^1}^2 &= \|U(t) - U(t_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial U(t)}{\partial x_i} - \frac{\partial U(t_0)}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\
&= \int_\Omega |u(t, X) - u(t_0, X)|^2 dX + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, X) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(t_0, X) \right|^2 dX = \\
&= \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t(X), X) \right|^2 \cdot |t - t_0|^2 dX + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i}(t_i^*(X), X) \right|^2 \cdot |t - t_0|^2 dX
\end{aligned}$$

cu $|t(X) - t_0| \leq |t - t_0|$ şi $|t_i^*(X) - t_0| \leq |t - t_0|$.
Funcţiile $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ şi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i}$ sunt continue şi prin urmare mărginite pe compacte de forma $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times \overline{\Omega}$. Rezultă de aici că, există o constantă pozitivă $K^2 > 0$ astfel ca

$$\|U(t) - U(t_0)\|^2_{H_0^1} \leq K^2 \cdot |t - t_0|^2,$$

de unde se obţine continuitatea funcţiei $U : [0, +\infty) \to H_0^1$.

iii) Egalităţile: $U(0) = u_0$ şi $U'(0) = u_1$ sunt imediate.

Considerăm în continuare spaţiul de funcţii $\mathcal{S}$ definit prin:

$$\mathcal{S} = C([0, +\infty); H_0^1) \cap C^1([0, +\infty); L^2).$$

Teorema precedentă arată că, dacă $u = u(t, X)$ este o soluţie clasică a problemei (7.36-7.39), atunci funcţia U definită prin $U(t)(X) = u(t, X)$ aparţine spaţiului de funcţii $\mathcal{S}$ şi verifică $U(0) = u_0$, $U'(0) = u_1$.
Fie $T > 0$ şi subspaţiul de funcţii $\mathcal{S}_T$ definit prin:

$$\mathcal{S}_T = \{V \in \mathcal{S} | V(T) = 0\}$$

Teorema 7.4.2 *Dacă funcţia $u = u(t, X)$ este o soluţie clasică a problemei (7.36-7.39), atunci funcţia U definită prin $U(t)(X) = u(t, X)$ aparţine spaţiului de funcţii S, verifică $U(0) = u_0, U'(0) = u_1$ şi pentru orice $T > 0$ şi orice funcţie $V \in S_T$ are loc egalitatea:*

$$-\int_0^T < U'(t), V'(t) >_{L^2(\Omega)} dt - < u_1, V(0) >_{L^2(\Omega)} + \int_0^T < U(t), V(t) >_A dt = \int_0^T < F(t), V(t) >_{L^2(\Omega)} dt. \tag{7.40}$$

Demonstraţie: Apartenenţa funcţiei U la spaţiul $\mathcal{S}$ a fost demonstrată. S-a arătat de asemenea că $U(0) = u_0$ şi $U'(0) = u_1$. Rămâne doar să arătăm că

pentru orice $T > 0$ şi orice $V \in \mathcal{S}_T$ are loc egalitatea (7.40).
În acest scop, fie $T > 0$ şi $V \in \mathcal{S}_T$. Scriind egalitatea (7.36) sub forma:

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2}(X) + A \cdot U(t)(X) = F(t)(X)$$

(unde $F(t)(X) = f(t, X)$), înmulţind această egalitate cu funcţia $V(t)(X)$ şi integrând pe Ω obţinem:

$$< \frac{d^2U}{dt^2}, V >_{L^2(\Omega)} + < U(t), V(t) >_A = < F(t), V(t) >_{L^2(\Omega)} .$$

Integrăm acum această egalitate în raport cu t pe segmentul $[0, T]$, ţinem seama de $V(T) = 0$ şi obţinem:

$$< U'(t), V(t) >_{L^2(\Omega)} \Big|_0^T - \int_0^T < U'(t), V'(t) >_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T < U(t), V(t) >_A dt =$$

$$= \int_0^T < F(t), V(t) >_{L^2(\Omega)} dt$$

adică:

$$< U'(0), V(0) >_{L^2(\Omega)} - \int_0^T < U'(t), V'(t) >_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T < U(t), V(t) >_A dt =$$

$$= \int_0^T < F(t), V(t) >_{L^2(\Omega)} dt$$

ceea ce este echivalent cu:

$$- < u_1, V(0) >_{L^2(\Omega)} - \int_0^T < U'(t), V'(t) >_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T < U(t), V(t) >_A =$$

$$= \int_0^T < F(t), V(t) >_{L^2(\Omega)} dt$$

Definiţia 7.4.3 *O funcţie $U \in \mathcal{S}$ se numeşte soluţie generalizată a problemei (7.36-7.39) dacă $U(0) = u_0$, $U'(0) = u_1$ şi pentru $(\forall)T > 0, (\forall)V \in \mathcal{S}_T$ verifică:*

$$- < u_1, V(0) >_{L^2(\Omega)} - \int_0^T < U'(t), V'(t) >_{L^2(\Omega)} dt +$$

$$+ \int_0^T < U(t), V(t) >_A dt = \int_0^T < F(t), V(t) >_{L^2(\Omega)} dt \tag{7.41}$$

Observaţia 7.4.2 O soluţie clasică $u(t, X)$ a problemei (7.36-7.39) defineşte o soluţie generalizată a acestei probleme.

Teorema 7.4.3 *Dacă funcţia $U \in \mathcal{S}$ este soluţie generalizată a problemei (7.36-7.39) şi funcţia $u : [0, +\infty) \times \overline{\Omega} \to I\!R^1$ definită prin $u(t, X) = U(t, X)$ este de clasă C^2 pentru $t > 0$ şi $X \in \Omega$, atunci funcţia $u = u(t, X)$ este soluţie clasică a problemei (7.36-7.39).*

Demonstraţie: Egalitatea (7.37):

$$u(t, X) = 0, \ (\forall)t \geq 0 \text{ şi } (\forall)x \in \partial\Omega$$

rezultă din apartenenţa $U(t) \in H_0^1$. Egalitatea (7.38): $u(0, X) = u_0(0)$, $(\forall)X \in \overline{\Omega}$ rezultă din $U(0) = u_0$.
Egalitatea (7.39): $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0, X) = u_1(X)$, $(\forall)X \in \partial\Omega$ rezultă din $U'(0) = u_1$.
Rămâne doar să arătăm egalitatea (7.36) adică:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A \cdot u(t, X) = f(t, X).$$

Pentru a deduce această egalitate pornim de la egalitatea (7.41) pe care o scriem sub forma:

$$- \int_0^T \left(\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t, X) \cdot V'(t)(X) dX \right) dt - \int_\Omega u_1(X) \cdot V(0)(X) dX +$$

$$+\int_0^T\left(\int_\Omega A\cdot u(t,X)\cdot V(t)(X)dX\right)dt=\int_0^T\left(\int_\Omega f(t,X)\cdot V(t)(X)dX\right)dt.$$

Itervertind ordinea de integrare şi făcând o integrare prin părţi în raport cu t în prima integrală, obţinem:

$$\int_\Omega\int_0^T\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+A\cdot u(t,X)-f(t,X)\right]\cdot V(t)(X)dt\,dX=0$$

pentru orice $V\in\mathcal{S}_T$ (am ţinut seama de faptul că $V(T)=0$).
Rezultă de aici că:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+A\cdot u(t,X)=f(t,X),\ (\forall)t>0,\ (\forall)X\in\Omega.$$

Observaţia 7.4.3 Această teoremă arată că dacă o soluţie generalizată este suficient de ”netedă” atunci ea este soluţie clasică.

Teorema 7.4.4 *(de unicitate a soluţiei generalizate)*
Problema (7.36)-(7.39) are cel mult o soluţie generalizată.

Demonstraţie: Presupunem prin absurd că problema (7.36)-(7.39) admite soluţiile generalizate $U_1(t)$ şi $U_2(t)$ şi considerăm funcţia $U(t)=U_1(t)-U_2(t)$. Pentru orice $T>0$ şi orice $V\in\mathcal{S}_T$ funcţiile U şi V verifică:

$$-\int_0^T < U'(t),V'(t) >_{L^2(\Omega)}dt+\int_0^T < U(t),V(t) >_A dt=0$$

Funcţia $\overline{V}$ definită prin $\overline{V}(t)=\int_t^T U(\tau)d\tau$ aparţine spaţiilor de funcţii $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}_T$ şi are următoarele proprietăţi:

$$\overline{V}'(t)=-U(t)\quad \text{şi } \overline{V}''(t)=-U'(t).$$

Înlocuind acestea în relaţia de mai sus rezultă că:

$$\int_0^T < \overline{V}''(t),\overline{V}'(t) >_{L^2(\Omega)}dt-\int_0^T < \overline{V}'(t),V(t) >_A dt=0.$$

Deoarece

$$< \overline{V}''(t), \overline{V}'(t) >_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|\overline{V}'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

şi

$$< \overline{V}'(t), \overline{V}(t) >_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|\overline{V}(t)\|^2_A$$

egalitatea precedentă implică egalitatea:

$$\|\overline{V}'(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\overline{V}'(0)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\overline{V}(T)\|^2_A + \|\overline{V}(0)\|^2_A = 0.$$

Ţinem seamă acum de egalităţile $\overline{V}(T) = 0$, $\overline{V}'(0) = U(0) = 0$ şi deducem că:

$$\|\overline{V}'(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\overline{V}'(T)\|^2_A = 0,$$

din care rezultă $\overline{V}'(T) = 0$ şi $\overline{V}(0) = 0$.
Întrucât $T > 0$ este oarecare rezultă $\overline{V}'(T) = -U(T) = 0$. Prin urmare $U_1(T) = U_2(T)$, $(\forall)T \geq 0$. Astfel, rezultă cele două soluţii generalizate coincid.

Consecinţa 7.4.1 *Problema (7.36)-(7.39) are cel mult o soluţie clasică.*

Teorema 7.4.5 *(de existenţă a soluţiei generalizate)*
Dacă funcţia F definită prin $F(T)(X) = f(t, X)$ este continuă ca funcţie cu valori în $L^2(\Omega)$ şi dacă $u_0 \in H^1_0$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, atunci problema (7.36)-(7.39) are o soluţie generalizată.

Demonstraţie: Facem demonstraţia în două etape.
În prima etapă deducem o formulă de reprezentare a soluţiei generalizate în ipoteza că această soluţie există.
În a doua etapă arătăm că formula de reprezentare găsită în prima etapă, în condiţiile teoremei, defineşte o funcţie care este o soluţie generalizată.

Etapa I. Presupunem că $U = U(t)$ este o soluţie generalizată a problemei (7.36)-(7.39) şi considerăm şirul valorilor proprii

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \to \infty$$

ai prelungirii Friedrichs $\widetilde{A}$ a operatorului A, şi apoi şirul ortonormat de funcţii proprii $(\omega_k)_{k\in I\!N}$ corespunzător, care este complet în spaţiul $L^2(\Omega)$.
Considerăm funcţiile

$$u_k(t) = < U(t), \omega_k >_{L^2(\Omega)}$$

şi reprezentarea

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cdot \omega_k$$

a funcţiei $U(t)$. Pentru că $U \in C^1([0, +\infty); L^2(\Omega))$ funcţiile $u_k(t)$ sunt derivabile şi au derivată continuă, iar $U'(t)$ se reprezintă astfel:

$$U'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t) \cdot \omega_k.$$

În virtutea acestei formule de reprezentare, egalitatea (7.41) pe care o satisface soluţia generalizată U devine:

$$-\int_0^T \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(t) \cdot < V'(t), \omega_k >_{L^2(\Omega)} dt - \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(0) \cdot < V(0), \omega_k >_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \int_0^T \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \cdot u_k(t) < V(t), \omega_k >_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \cdot < V(t), \omega_k >_{L^2(\Omega)} dt.$$

Fie acum j un număr natural oarecare fixat şi funcţia $V_j \in \mathcal{S}_T$ definită prin:

$$V_j(t) = (T - t) \cdot \omega_j.$$

În egalitatea precedentă înlocuim V cu V_j, ţinem seama de egalităţile

$$< \omega_k, \omega_j >_{L^2(\Omega)} = \delta_{kj};\ V'(t) = -\omega_j,\ V(0) = T \cdot \omega_j$$

şi obţinem:

$$-T \cdot < u_1, \omega_j >_{L^2(\Omega)} + \int_0^T u'_j(t) dt + \lambda_j \cdot \int_0^T (T - t) \cdot f_j(t) dt = \int_0^T (T - t) f_j(t) dt$$

pentru $j = 1, 2, \ldots$

Derivând de două ori în raport cu T rezultă:

$$\begin{cases} u''_j(T) + \lambda_j \cdot u_j(T) = f_j(T),\ (\forall) T > 0 \\ u'_j(0) = < u_1, \omega_j >_{L^2(\Omega)} \\ u_j(0) = < u_0, \omega_j >_{L^2(\Omega)},\ j = 1, 2, \ldots \end{cases} \quad (7.42)$$

Problema cu datele iniţiale (7.42) are o singură soluţie şi aceasta este dată de:

$$u_j(t) = < u_0, \omega_j >_{L^2(\Omega)} \cdot \cos\sqrt{\lambda_j} \cdot t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \cdot < u_1, \omega_j >_{L^2(\Omega)} \cdot \sin\sqrt{\lambda_j} \cdot t +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \cdot \int_0^T f_j(\tau) \cdot \sin\sqrt{\lambda_j} \cdot (t-\tau) d\tau, \; (\forall) t \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots \tag{7.43}$$

Astfel rezultă că soluţia generalizată U are următoarea reprezentare:

$$U(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left[< u_0, \omega_j >_{L^2(\Omega)} \cdot \cos\sqrt{\lambda_j} \cdot t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \cdot < u_1, \omega_j >_{L^2(\Omega)} \cdot \sin\sqrt{\lambda_j} \cdot t \right] \cdot \omega_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \cdot \int_0^T f_j(\tau) \cdot \sin\sqrt{\lambda_j} \cdot (t-\tau) d\tau \right) \cdot \omega_j. \tag{7.44}$$

Etapa II Arătăm acum că, în condiţiile din teoremă formula (7.44) defineşte o funcţie U care aparţine spaţiului $\mathcal{S}$ şi verifică (7.41) pentru $T > 0$. Convergenţele

$$\sum_{j=1}^{+\infty} | < u_0, \omega_j >_{L^2} |^2 < +\infty \text{ şi } \sum_{j=1}^{+\infty} | < u_1, \omega_j >_{L^2} |^2 < +\infty$$

implică convergenţa uniformă în raport cu $t \in [0, +\infty)$ în spaţiul $L^2(\Omega)$ a seriei de funcţii:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left[< u_0, \omega >_{L^2(\Omega)} \cdot \cos\sqrt{\lambda_j} \cdot t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \cdot < u_1, \omega_j >_{L^2} \cdot \sin\sqrt{\lambda_j} \cdot t \right] \cdot \omega_j$$

şi faptul că suma seriei este funcţie continuă de t cu valori în $L^2(\Omega)$. Inegalităţile:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \cdot \int_0^T f_j(\tau) \cdot \sin\sqrt{\lambda_j} \cdot (t-\tau) d\tau \right|^2 \leq \frac{T}{\lambda_1} \int_0^T f_j^2(\tau) d\tau,$$

$(\forall) t \in [0, T], j = 1, 2, \ldots$

precum şi convergenţa seriei de funcţii continue şi pozitive $\sum_{j=1}^{+\infty} f_j^2(\tau)$ la funcţia continuă $\|F(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}$ implică convergenţa uniformă în raport cu $t \in [0, T]$ $((\forall) T > 0$ şi $T < +\infty)$ în $L^2(\Omega)$ a seriei de funcţii:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \int_0^t f_j(\tau) \cdot \sin \sqrt{\lambda_j}(t - \tau) d\tau \right) \omega_j$$

şi faptul că suma seriei este funcţie continuă de t cu valori în $L^2(\Omega)$. Rezultă că, în condiţiile din teoremă formula (7.44) defineşte o funcţie $U \in C([0, +\infty); L^2(\Omega))$.

Pentru a demonstra apartenenţa $U \in C^1([0, +\infty); L^2(\Omega))$ se consideră seria derivatelor:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left[-\sqrt{\lambda_j} \cdot < u_0, \omega >_{L^2(\Omega)} \cdot \sin \sqrt{\lambda_j} \cdot t + < u_1, \omega_j >_{L^2(\Omega)} \cdot \cos \sqrt{\lambda_j} \cdot t \right] \cdot \omega_j +$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\int_0^T f_j(\tau) \cdot \cos(\sqrt{\lambda_j}) \cdot (t - \tau) d\tau \right) \omega_j$$

şi se arată că aceasta converge uniform în raport cu $t \in [0, T] (T > 0$ şi $T < +\infty)$ în spaţiul $L^2(\Omega)$.

Trecem să examinăm convergenţa seriei derivatelor care este de fapt o sumă de trei serii.

Prima dintre acestea este seria

$$\sum_{j=1}^{+\infty} -\sqrt{\lambda_j} \cdot < u_0, \omega_j >_{L^2(\Omega)} \cdot \sin \sqrt{\lambda_j} \cdot t \cdot \omega_j$$

şi este uniform convergentă în raport cu $t \in [0, +\infty)$ dacă seria numerică: $\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \cdot | < u_0, \omega_j >_{L^2(\Omega)} |^2$ este convergentă. Aceasta din urmă, poate fi

scrisă sub forma:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \cdot | < u_0, \omega_j >_{L^2(\Omega)} |^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \cdot \lambda_j^2 \cdot | < u_0, \omega_j >_{L^2(\Omega)} |^2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} \cdot | < u_0, \omega_j >_A |^2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \left| < u_0, \frac{\omega_j}{\sqrt{\lambda_j}} >_A \right|^2$$

şi prin urmare este convergentă pentru că $u_0 \in H_0^1$.

Următoarea serie a cărei convergenţă trebuie examinată este seria $\sum_{j=1}^{+\infty} < u_1, \omega_j >_{L^2(\Omega)} \cdot \cos\sqrt{\lambda_j} \cdot t \cdot \omega_j$.

Această serie este uniform convergentă în raport cu $t \in [0, +\infty)$ dacă seria numerică $\sum_{j=1}^{+\infty} | < u_1, \omega_j >_{L^2(\Omega)} |^2$ este convergentă , ceea ce este adevărat pentru că $u_1 \in L^2(\Omega)$.

Ceea de a treia serie care trebuie examinată este seria:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\int_0^T f_j(\tau) \cdot \cos\sqrt{\lambda_j} \cdot (t-\tau) d\tau \right) \omega_j.$$

Aceasta este uniform convergentă în raport cu $t \in (0, T]$ ($T > 0$ şi $T < +\infty$) dacă seria numerică:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left| \int_0^T f_j(\tau) \cdot \cos\sqrt{\lambda_j} \cdot (t-\tau) d\tau \right|$$

este uniform convergentă în raport cu $t \in [0, T]$. Datorită majorării:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left| \int_0^T f_j(\tau) \cdot \cos\sqrt{\lambda_j} \cdot (t-\tau) d\tau \right|^2 \leq \sum_{j=1}^{+\infty} T \cdot \int_0^T f_j^2(\tau) d\tau$$

problema se reduce la convergenţa uniformă pe [0,T] a seriei $\sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^T f_j^2(\tau)d\tau$. Această din urmă convergenţă se obţine din convergenţa uniformă a seriei $\sum_{j=1}^{+\infty} f_j^2(\tau)d\tau$ pe [0,T], care rezultă pe baza teoeremei lui Dini din continuitatea şi pozitivitatea funcţiilor $f_j^2(\tau)$, continuitatea funcţiei $\|F(\tau)\|^2$ şi egalitatea $\sum_{j=1}^{+\infty} f_j^2(\tau) = \|F(\tau)\|^2$, $(\forall)\tau \in [0,T]$.
În acest fel, se obţine că formula (7.44) defineşte o funcţie $U \in C^1([0,+\infty); L^2(\Omega))$.

Urmează să arătăm aparteneţa $U \in C([0,+\infty); H_0^1)$.
Convergenţa uniformă în raport cu $t \in [0,+\infty)$ a seriei

$$\sum_{j=1}^{+\infty} < u_0, \omega_j >_{L^2(\Omega)} \cdot \cos\sqrt{\lambda_j} \cdot t \cdot \omega_j$$

în H_0^1 poate fi asigurată prin convergenţa uniformă în raport cu $t \in [0,+\infty)$ a seriei:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_j} < u_0, \omega_j >_{L^2(\Omega)} \cdot \cos\sqrt{\lambda_j} \cdot t \cdot \frac{\omega_j}{\sqrt{\lambda_j}} \text{ în } H_0^1.$$

Convergenţa acestei serii rezultă din convergenţa seriei numerice

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j| < u_0, \omega_j >_{L^2(\Omega)} |^2,$$

convergenţă ce este asigurată de ipoteza $u_0 \in H_0^1$.
Convergenţa uniformă în raport cu $t \in [0,+\infty)$ a seriei de funcţii

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \cdot < u_1, \omega_j >_{L^2(\Omega)} \cdot \sin\sqrt{\lambda_j} \cdot t \cdot \omega_j$$

în spaţiul H_0^1 este asigurată de convergenţa seriei $\sum_{j=1}^{+\infty} | < u_1, \omega_j > |_{L^2(\Omega)}^2$, convergenţă care rezultă din apartenenţa $u_1 \in L^2(\Omega)$.

În fine, convergenţa uniformă în raport cu $t \in [0, T]$ ($T > 0$ şi $T < +\infty$) a seriei de funcţii:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_0^T f_j(\tau) \cdot \sin \sqrt{\lambda_j} \cdot (t - \tau) d\tau \right) \omega_j$$

în spaţiul H_0^1 este asigurată dacă seria

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\int_0^T f_j(\tau) \cdot \sin \sqrt{\lambda_j} \cdot (t - \tau) d\tau \right)$$

converge uniform pe [0,T]. Aceasta din urmă convergenţă a fost deja demonstrată.

Am obţinut în acest fel apartenenţa $U \in C([0, +\infty); H_0^1)$.

Derivând acum în raport cu t funcţia U dată de (7.44) ca funcţie cu valori în $L^2(\Omega)$, ţinând seama de relaţiile (7.42) se obţine că funcţia U dată de (7.44) este soluţie generalizată a problemei (7.36)-(7.39).

Exerciţii:

Determinaţi soluţia generalizată pentru fiecare din Problemele Cauchy-Dirichlet de tip hiperbolic:

1. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x,t) \in (0,l) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin \dfrac{4\pi}{l} x, & x \in [0,l] \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & x \in [0,l] \end{cases}$$

R: $u(x,t) = \cos \dfrac{4\pi}{l} t \cdot \sin \dfrac{4\pi}{l} x$

2. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - t \cdot \sin x, & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 4 \sin x \cos x, & x \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2 \sin 3x, & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

R: $u(x,t) = (\sin t - t) \cdot \sin x + 2 \cos 2t \cdot \sin 2x + \dfrac{2}{3} \sin 3t \cdot \sin 3x$

3. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 2 \sin x, & x \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin x + \sin 2x, & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

R: $u(x,t) = \left(2 \cos 2t + \dfrac{1}{2} \sin 2t\right) \cdot \sin x + \dfrac{1}{4} \sin 4t \cdot \sin 2x$

7.5 Calculul simbolic şi numeric al soluţiei Problemei Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţii hiperbolice

Deoarece pentru calculul simbolic al soluţiei unei probleme Cauchy-Dirichlet funcţia *pdsolve* nu afişează nimic, vom trece la rezolvarea numerică folosind funcţia *pdsolve* specifică calculului numeric, a cărei sintaxă a fost prezentată într-unul din paragrafele anterioare.

Pentru exemplificare considerăm următoarele probleme Cauchy-Dirichlet de tip hiperbolic:

Exemplul 1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = x^2 - x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

Wave equation

```
> PDE1 :=diff(u(x,t),t,t)=diff(u(x,t),x,x);
```

$$PDE1 := \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

```
> IBC1 := {u(0,t)=0, u(1,t)=0,u(x,0)=x^2-x, D[2](u)(x,0)=0};
```

$$IBC1 := \{u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, u(x,0) = x^2 - x, D_2(u)(x,0) = 0\}$$

```
> pds1 := pdsolve(PDE1,IBC1,numeric);
```

pds1 := module () local INFO; export plot, plot3d, animate, value, settings; option ‘Copyright (c) 2001 by Waterloo Maple Inc. All rights reserved.‘; end module

```
> p1 := pds1:-plot(t=0):
```

```
p2 := pds1:-plot(t=1/10):
p3 := pds1:-plot(t=1/2):
p4 := pds1:-plot(t=1):
p5 := pds1:-plot(t=2):
plots[display]({p1,p2,p3,p4,p5},
title=`Wave profile at t=0,0.1,0.5,1,2`);
```

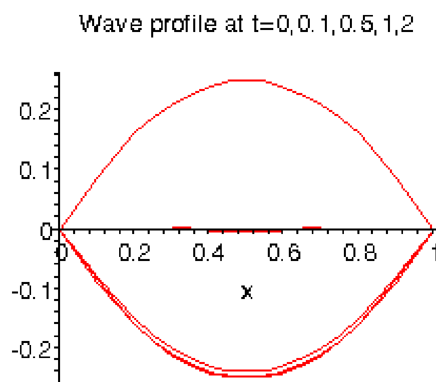


Figura 36

```
> pds1:-plot3d(t=0..1,x=0..1,axes=boxed);
```

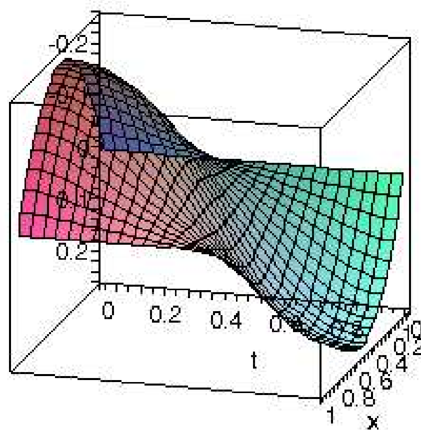


Figura 37

Exemplul 2:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - t \cdot sinx \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 4 \cdot sinx \cdot cosx \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2 \cdot sin3x \end{cases}$$

Wave equation

```
> PDE2 :=diff(u(x,t),t,t)=diff(u(x,t),x,x)-t*sin(x);
```

$$PDE2 := \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - t\sin(x)$$

```
> IBC2 :={u(0,t)=0,u(Pi,t)=0,u(x,0)=4*(sin(x))*(cos(x)),
        D[2](u)(x,0)=2*sin(3*x)};
```

$$IBC2 := \{u(0,t)=0, u(\pi,t)=0, u(x,0)=4\,\sin(x)\cos(x), D_2(u)(x,0)=2\,\sin(3\,x)\}$$

```
> pds2 := pdsolve(PDE2,IBC2,numeric);
```

pds1 := module () local INFO; export plot, plot3d, animate, value, settings; option ‘Copyright (c) 2001 by Waterloo Maple Inc. All rights reserved.‘; end module

```
> p6 := pds2:-plot(t=0):
  p7 := pds2:-plot(t=1/10):
  p8 := pds2:-plot(t=1/2):
  p9 := pds2:-plot(t=1):
  p10 := pds2:-plot(t=2):
  plots[display]({p6,p7,p8,p9,p10},
  title=‘Wave profile at t=0,0.1,0.5,1,2‘);
```

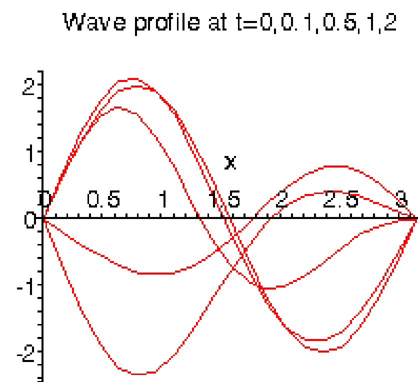


Figura 38

```
> pds2:-plot3d(t=0..1,x=0..Pi/2,axes=boxed);
```

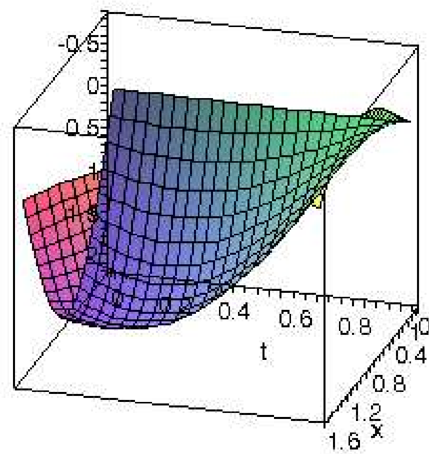


Figura 39

Exemplul 3:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) = 4 \cdot \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \\ v(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 2 \cdot sinx \end{cases}$$

Wave equation

```
> PDE3 :=diff(v(x,t),t,t)=4*diff(v(x,t),x,x);
```

$$PDE2 := \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x,t) = 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t)$$

```
> IBC3 :={v(0,t)=0,v(Pi/2,t)=0,v(x,0)=0,
          D[2](v)(x,0)=2*sin(x);
```

$$IBC3 := \{v(0,t) = 0, v(1/2\,\pi,t) = 0, v(x,0) = 0, D_2(v)(x,0) = 2\sin(x)\}$$

```
> pds3 := pdsolve(PDE3,IBC3,numeric);
```

pds1 := module () local INFO; export plot, plot3d, animate, value, settings; option ‘Copyright (c) 2001 by Waterloo Maple Inc. All rights reserved.‘; end module

```
> q1 := pds3:-plot(t=0):
  q2 := pds3:-plot(t=1/10):
  q3 := pds3:-plot(t=1/2):
  q4 := pds3:-plot(t=1):
  q5 := pds3:-plot(t=2):
  plots[display]({q1,pq2,q3,q4,q5},
  title=‘Wave profile at t=0,0.1,0.5,1,2‘);
```

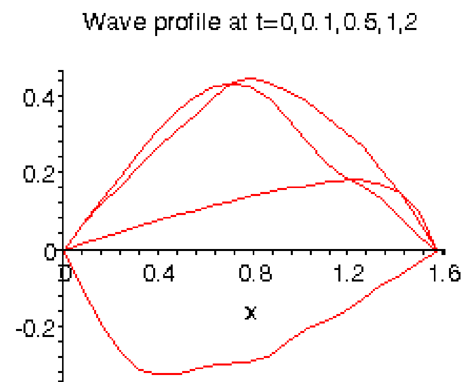


Figura 40

```
> pds3:-plot3d(t=0..1,x=0..Pi/2,axes=boxed);
```

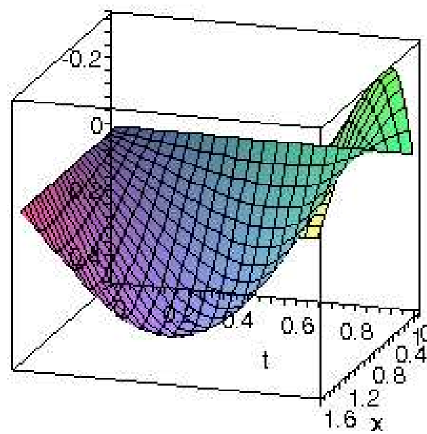


Figura 41

Bibliografie

[1] V.I. Arnold, *Ecuaţii diferenţiale ordinare*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1978.

[2] Şt. Balint, A.M. Balint, S. Birăuaş, C. Chilărescu, *Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii integrale*, Editura Universităţii de Vest, 2001.

[3] V.Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.

[4] R. Cristescu, *Elemente de analiză funcţională şi introducere în teoria distrubuţiilor*, Editura Tehnică, 1966.

[5] S.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw Hill, New York, 1955.

[6] A. Corduneanu, *Ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii în electrotehnică*, Editura Facla, 1981, Timişoara

[7] C. Corduneanu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Universitatea "Al.I. Cuza", Iaşi, 1971.

[8] G.M. Fihtenholt, *Curs de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică, 1964.

[9] D. Gaşpar, N. Suciu, *Analiză complexă*, Editura Academiei Române, 1999.

[10] A. Halanay, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Universitatea din Bucureşti, 1971.

[11] A. Halanay, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

[12] J.Ray Hanna, John H. Rowland, *Fourier series, transforms, and boundary value problems* A Wiley-Interscience Publication John Wiley and Sons, Inc., 1991, USA.

[13] D. Hărăguş, *Ecuaţii cu derivate parţiale*, Editura Universităţii de Vest, Timişoara, 2001.

[14] A. Eckstein, D. Hărăguş, *Exerciţii standard de ecuaţii cu derivate parţiale*, Tipografia Universităţii de Vest din Timişoara, 2000.

[15] Ph. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, J. Wiley, New York, 1964.

[16] M. Hirsh, S. Smale, *Differential Equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, New York, 1974.

[17] J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systémes dynamiques*, Cassini, Paris, 1999.

[18] St. Mirică, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1999.

[19] Gh. Moroşanu, *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii*, Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[20] M.Reghiş, P.Topuzu, *Ecuaţii diferenţiale ordinare*, Editura Mirton, 2000.

[21] E. Rogai, *Exerciţii şi probleme de ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Editura Tehnică, 1965.

[22] N. Rouche, P. Habets, M. Laloy, *Stability Theory by Liapunov direct Method*, Springer, 1977.

[23] I.A. Rus, P. Pavel, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[24] I.A. Rus, *Ecuaţii diferenţiale, ecuaţii integrale şi sisteme dinamice* Casa de Editură Transilvania Press, 1996.

[25] V.V. Stepanov, *Curs de ecuaţii diferenţiale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1955.

[26] M.Stoka, *Culegere de probleme de funcţii complexe*, Editura Tehnică, 1965.

[27] M. Tihonov, A.A. Samarski, *Ecuaţiile fizicii matematice*, Editura Tehnică, 1956.

[28] K. Yosida, *Équations différentielles et intégrales*, Dunod, Paris, 1971.